

Capítulo 9

Introducción al Control Óptimo

9.1. Introducción

El método de diseño combinado de observador y realimentación de estados que vimos en el capítulo pasado es una herramienta fundamental en el control de sistemas en variable de estados. Sin embargo, no es siempre el método más *útil*; tres dificultades obvias:

1. La traducción de especificaciones de diseño a ubicación de polos no es directa, especialmente en sistemas complejos; ¿cuál es la mejor configuración de polos para especificaciones dadas?
2. Las ganancias de realimentación en sistemas MIMO no son únicas; ¿cuál es la mejor ganancia para una configuración de polos dada?
3. Los autovalores del observador deben elegirse más rápidos que los del controlador, pero, ¿tenemos algún criterio adicional para preferir una configuración a otra?

Los métodos que introduciremos en este capítulo dan respuestas a éstas preguntas. Veremos que las ganancias de realimentación de estados y del observador pueden elegirse de forma que minimicen un criterio de optimización dado.

El criterio particular que veremos es un funcional cuadrático del estado y la entrada de control,

$$J(x(t), u(t)) = \int_t^T [x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)] d\tau,$$

donde Q y R son matrices constantes (aunque no necesariamente) semi-definida y definida positivas respectivamente.

El control que se obtiene de minimizar este criterio es *lineal*. Como el criterio se basa en funcionales cuadráticos, el método se conoce como *lineal-cuadrático* (LQ: linear-quadratic), del que se obtiene el *regulador lineal cuadrático* (LQR).

Criterios similares de optimización se siguen para el diseño de observadores, sólo que el funcional depende del error de estimación, y se basa en una caracterización estadística de los ruidos que afectan al sistema. Este estimador óptimo lineal-cuadrático se conoce como el *filtro de Kalman*.

Cuando se combinan la ganancia de realimentación de estados LQ con el filtro de Kalman, obtenemos lo que se conoce como un *controlador lineal-cuadrático-gaussiano* (LQG). (Lo de gaussiano viene de la caracterización estadística del ruido empleada.)

Como material de estudio para este capítulo recomendamos Bay [1999, Capítulo 11] y Friedland [1986, Capítulos 9, 10 y 11].

9.1.1. El Principio de Optimalidad

Para entender la idea de criterio de optimización en variable de estados, la introduciremos con sistemas de tiempo discreto, que son más simples.

El estado de un sistema discreto describe una trayectoria haciendo transiciones discretas de un estado a otro bajo el efecto de una entrada también aplicada en tiempo discreto.

Cuando se asocia un criterio de optimización al sistema, cada transición de estado tiene asociado un *costo* o *penalidad*. Por ejemplo, pueden penalizarse las transiciones de estado que se alejan demasiado del estado final deseado, o las acciones de control de valores demasiado elevados. A medida que el sistema evoluciona de estado en estado, los costos se suman hasta acumular un costo total asociado a la trayectoria.

Ilustramos el concepto con el grafo de la Figura 9.1, que representa 8 estados de un sistema discreto con sus transiciones posibles. El estado inicial es el 1, y el final el 8. El sistema pasa de un estado a otro en cada tiempo k determinado por la entrada $u[k]$ y las ecuaciones $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$.

Las transiciones posibles se representan por los arcos que conectan el estado inicial al final a través de los estados intermedios. El costo asociado a cada transición se representa con la letra J ; por ejemplo, el costo de moverse del estado 3 al 5 es J_{35} .

Asumiendo que los costos se acumulan en forma aditiva, vemos que la trayectoria marcada en rojo, por ejemplo, tiene un costo total $J_{13} + J_{35} + J_{56} + J_{68}$.

Como hay varias rutas alternativas del estado 1 al 8, el costo total dependerá de la trayectoria elegida. La señal de control $u^*[k]$ que determina la trayectoria de menor costo es la *estrategia óptima*. Como ya veremos, en sistemas de tiempo continuo, la acumulación de costos se representa mediante integración, en vez de suma.

La herramienta matemática que usaremos para determinar la estrategia óptima es el *principio de optimalidad de Bellman*.

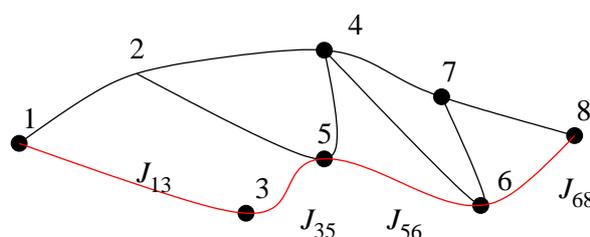


Figura 9.1: Posibles trayectorias de 1 al 8.

En cualquier punto intermedio x_i en una trayectoria óptima entre x_0 y x_f , la estrategia desde x_i al punto final x_f debe ser en sí una estrategia óptima.

Este obvio principio nos permitirá resolver en forma cerrada nuestros problemas de control óptimo. También se usa en el cómputo recursivo de las soluciones óptimas en un procedimiento llamado *programación dinámica*.

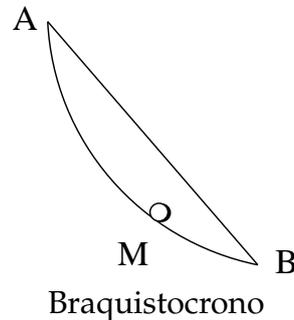
9.1.2. Nota Histórica

El nacimiento del control óptimo se atribuye al problema del *braquistocrono*, propuesto por el matemático suizo Johann Bernoulli en 1696. El problema consistía en determinar

cuál, entre todas las trayectorias posibles, era la que llevaba a una partícula (sin rozamiento) en el menor tiempo posible, desde un punto A a un punto B en el mismo plano vertical, sujeta sólo a la acción de la gravedad.



Johann Bernoulli (1667-1748)



Una formulación matemática moderna del problema del braquistocrono es la siguiente: encontrar la señal control $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ que lleve al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t)\sqrt{y(t)} \\ \dot{y}(t) &= v(t)\sqrt{y(t)}\end{aligned}$$

desde el punto $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ al punto $\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ en mínimo tiempo, sujeto a la restricción $u^2 + v^2 = 1$. Típico problema de control óptimo.

9.2. Control LQ discreto

Consideremos el sistema en tiempo discreto definido por¹

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p. \quad (9.1)$$

El problema de control que queremos resolver es: Encontrar la secuencia de control u_k que lleve al sistema (9.1) de la condición inicial $x_i = x_0$ al estado final $x_N = x_f$, minimizando el funcional cuadrático

$$J_{i,N} = \frac{1}{2}x_N^T Sx_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} x_k^T Qx_k + u_k^T Ru_k. \quad (9.2)$$

El funcional (9.2) puede interpretarse como el costo total de la transición de x_i a x_N y, en particular, el término $x_N^T Sx_N$ penaliza el error en alcanzar el estado final deseado.

Las matrices de peso S , Q y R pueden seleccionarse para penalizar ciertos estados/entradas más que otros. Como veremos, las matrices S y Q deben ser semi-definidas positivas, y la R definida positiva.

¹Para abreviar las expresiones, cambiamos la habitual notación discreta $x[k]$ a x_k .

9.2.1. Transición $[N - 1] \rightarrow [N]$

Para encontrar el control a aplicar al sistema de forma que se minimice (9.2), supongamos que estamos en el paso $N - 1$ de la trayectoria óptima. Así, el costo (9.2) de la transición de $N - 1$ a N es

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} (x_N^T S x_N + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + u_{N-1}^T R u_{N-1}) \quad (9.3)$$

Usando (9.1), sustituimos x_N como una función de u_{N-1} , lo que da

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} \left((Ax_{N-1} + Bu_{N-1})^T S (Ax_{N-1} + Bu_{N-1}) + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + u_{N-1}^T R u_{N-1} \right).$$

Como J es cuadrático en u , podemos minimizarlo diferenciando

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^T J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}} \\ &= B^T S (Ax_{N-1} + Bu_{N-1}) + R u_{N-1} \\ &= (R + B^T S B) u_{N-1} + B^T S A x_{N-1}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

De (9.4) obtenemos el último elemento de la secuencia de control óptima

$$u_{N-1}^* = -(R + B^T S B)^{-1} B^T S A x_{N-1}, \quad (9.5)$$

que resulta ser un *mínimo*, ya que

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}^2} = R + B^T S B > 0.$$

Como vemos, (9.5) es un control lineal por realimentación de estados de la forma habitual

$$u_{N-1}^* = -K_{N-1} x_{N-1},$$

donde

$$K_{N-1} \triangleq (R + B^T S B)^{-1} B^T S A. \quad (9.6)$$

El valor del costo mínimo $J_{N-1,N}^*$ obtenido con u_{N-1}^* es

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^* &= \frac{1}{2} \left((Ax_{N-1} - BK_{N-1}x_{N-1})^T S (Ax_{N-1} - BK_{N-1}x_{N-1}) + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + x_{N-1}^T K_{N-1}^T R K_{N-1} x_{N-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T \left((A - BK_{N-1})^T S (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1} \right) x_{N-1} \\ &\triangleq \frac{1}{2} x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

donde definimos $S_{N-1} \triangleq (A - BK_{N-1})^T S (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1}$. La elección de la notación S_{N-1} en (9.7) surge de que si estamos en el paso final N , no hay ninguna acción de control que tomar y $J_{N,N} = J_{N,N}^* = \frac{1}{2} x_N^T S x_N$, es decir,

$$\begin{aligned} S_N &= S \\ K_N &= (R + B^T S_N B)^{-1} B^T S_N A \\ S_{N-1} &= (A - BK_{N-1})^T S_N (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1}. \end{aligned}$$

9.2.2. Transición $[N - 2] \rightarrow [N]$

Tomamos otro paso para atrás en el cómputo del control óptimo y consideremos ahora que estamos en el paso $N - 2$. Notemos primero de (9.2) que

$$J_{N-2,N} = J_{N-2,N-1} + J_{N-1,N}.$$

Por lo tanto, para calcular la estrategia óptima para ir del estado en $N - 2$ al estado final en N , usamos el *principio de optimalidad* para deducir que

$$J_{N-2,N}^* = J_{N-2,N-1} + J_{N-1,N}^*$$

y así reducimos el problema al de calcular la estrategia óptima para ir de $N - 2$ a $N - 1$ (la de $N - 1$ a N ya la obtuvimos). Así, ahora el paso $N - 1$ es el "final", y podemos usar la misma ecuación (9.3) pero con $N - 1$ en vez de N , y $N - 2$ en vez de $N - 1$. Obtenemos

$$J_{N-2,N-1} = \frac{1}{2} (x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1} + x_{N-2}^T Q x_{N-2} + u_{N-2}^T R u_{N-2})$$

Igual que antes, podemos minimizar $J_{N-2,N-1}$ sobre todos los posibles u_{N-2} , y es fácil ver que las expresiones son las mismas pero con $N - 1$ en vez de N , y $N - 2$ en vez de $N - 1$,

$$u_{N-2}^* = -K_{N-2} x_{N-2},$$

donde

$$K_{N-2} \triangleq (R + B^T S_{N-1} B)^{-1} B^T S_{N-1} A.$$

9.2.3. Transición $[k] \rightarrow [N]$

Retrocediendo en los pasos $N - 2, N - 3, \dots, k$, se generan las siguientes expresiones recursivas para el control óptimo

$$u_k^* = -K_k x_k \quad (9.8)$$

$$K_k = (R + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A \quad (9.9)$$

$$S_k = (A - B K_k)^T S_{k+1} (A - B K_k) + Q + K_k^T R K_k. \quad (9.10)$$

Notar que la ecuación en diferencias (9.10) de S_k se resuelve *para atrás*, comenzando en $S_N = S$. El costo óptimo de k a N es $J_{k,N}^* = \frac{1}{2} x_k^T S_k x_k$.

El conjunto de ecuaciones (9.8), (9.9) y (9.10) representa el controlador LQ completo para el sistema discreto (9.1), que resulta, en general, *inestacionario*. La ecuación en diferencias (9.10) se conoce como la *ecuación matricial en diferencias de Riccati*. El hecho de que se resuelva *para atrás* en el tiempo le da a K_k la peculiaridad de que los transitorios aparecen al final del intervalo $[k, T]$, en vez de al principio.

Ejemplo 9.1 (Control LQ en tiempo discreto). Simulamos el sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

con el controlador LQ óptimo que minimiza el costo

$$J = \frac{1}{2} x_{10}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} x_{10} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 x_k^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} x_k + 2u_k^2.$$

Las siguientes líneas de código MATLAB computan K_k y x_k en lazo cerrado.

```

% Costo
Q=[2 0;0 0.1];R=2;S=diag([5,5]);
k=10;
% Sistema
A=[2 1;-1 1];B=[0;1];x0=[2;-3];
% Solucion de la ecuacion de Riccati
while k>=1
    K(k,:)=inv(R+B'*S*B)*B'*S*A;
    S=(A-B*K(k,:))'*S*(A-B*K(k,:))+Q+K(k,:)'*R*K(k,:);
    k=k-1;
end
% Simulacion del sistema realimentado
x(:,1)=x0;
for k=1:10
    x(:,k+1) = A*x(:,k)-B*K(k,:)*x(:,k);
end

```

La matriz de realimentación K_k debe calcularse en tiempo invertido y almacenarse para ser aplicada posteriormente al sistema en tiempo normal.

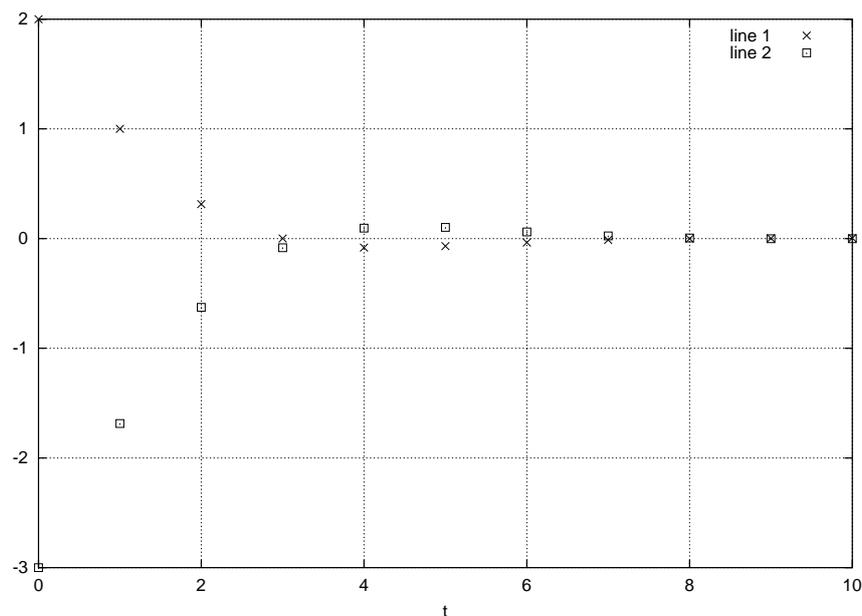


Figura 9.2: Evolución del estado en lazo cerrado: line 1: $x_1[k]$, line 2: $x_2[k]$

Aunque la planta a lazo abierto es inestable (autovalores en $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$), vemos que el estado es estabilizado asintóticamente por u_k^* . Notar que la planta a lazo cerrado es inestacionaria, ya que el control lo es.

La Figura 9.2 muestra la evolución de las ganancias de control. Podemos comprobar que sus valores cambian más sobre el *final* del intervalo, más que al comienzo, donde permanecen casi constantes.

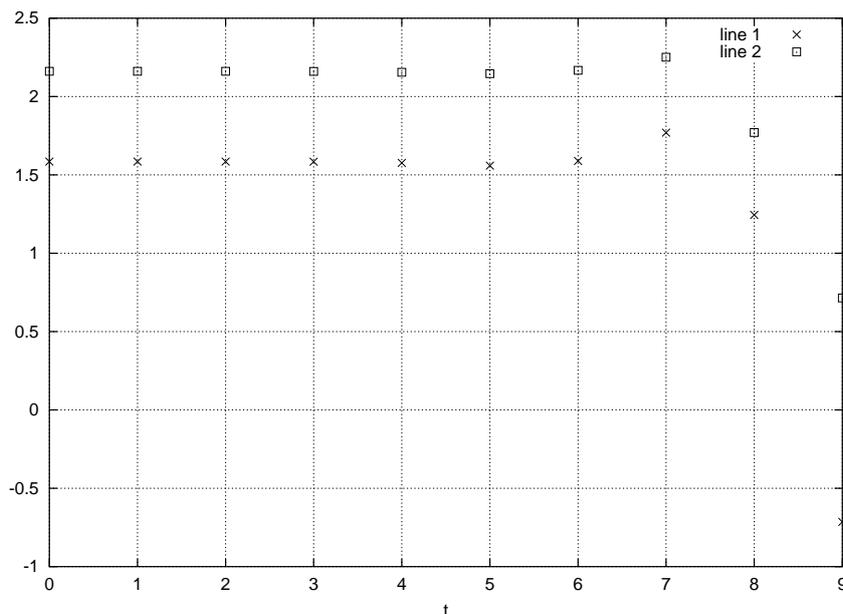


Figura 9.3: Evolución de las ganancias $K[k] = [k_1[k], k_2[k]]$ (line 1 y line 2).

9.3. Control LQ en tiempo continuo

La deducción del control óptimo LQ para el sistema en tiempo continuo,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (9.11)$$

sigue los mismos pasos que el de tiempo discreto, sólo que las “transiciones” se reducen a “incrementos” infinitesimales. El costo es ahora

$$J(x(t_0), u(t_0), t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt.$$

Haciendo tender los incrementos a cero se obtienen los equivalentes de tiempo continuo de las ecuaciones (9.8), (9.9) y (9.10), que definen el control óptimo LQ en este caso (ver detalles en Bay [1999, §11.1.2]),

$$u^*(t) = -K(t)x(t) \quad (9.12)$$

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (9.13)$$

$$\dot{P}(t) = P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q - P(t)A - A^T P(t). \quad (9.14)$$

La ecuación (9.14) es la famosa *ecuación diferencial matricial de Riccati*, que, como en el caso discreto, también debe resolverse *hacia atrás* en el tiempo, con condiciones “iniciales” $P(t_f) = S$. Como en el caso discreto:

- El control óptimo LQ es una realimentación lineal de estados, aunque inestacionaria.
- Los “transitorios” en $P(t)$ y $K(t)$ ocurrirán sobre el final del intervalo $[t_0, t_f]$.

Pero, la ecuación diferencial (9.14) es en general de difícil solución. Aún, haciéndolo numéricamente, ¿cómo pueden guardarse los (infinitos) valores de $P(t)$ calculados en tiempo invertido para ser aplicados luego al sistema? Esta dificultad lleva a buscar una solución óptima *estacionaria*, $K(t) = K$, que surge de considerar el caso de *horizonte infinito* $t_f \rightarrow \infty$.

9.4. Control LQ de Horizonte Infinito

La Figura 9.3 del ejemplo sugiere que si hacemos tender el tiempo final a ∞ las soluciones de la ecuación de Riccati permanecerían constantes en el valor del instante inicial. Bajo esta suposición, $P(t)$ es constante y $\dot{P}(t) = 0$, que lleva la ecuación (9.14) a la forma que se conoce como la *ecuación algebraica de Riccati (ARE)*²

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0, \quad (\text{CARE})$$

con el correspondiente control óptimo LQ (ahora estacionario)

$$u^*(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T P x(t). \quad (9.15)$$

En el caso discreto tenemos $S_k = S, \forall k$, que da, de (9.10), (9.9)

$$\begin{aligned} S &= A^T S A - A^T S B (R + B^T S B)^{-1} B^T S A + Q \\ K &= (R + B^T S B)^{-1} B^T S A. \end{aligned} \quad (\text{DARE})$$

La ecuación (DARE) es la *ecuación algebraica discreta de Riccati*.

En rigor, sin embargo, no sabemos aún si estas soluciones constantes de “régimen permanente” resuelven los correspondientes problemas óptimos de horizonte infinito. Analizamos este punto a continuación.

Solución del problema de horizonte infinito. Queremos controlar el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con una realimentación estática de estados $u(t) = -Kx(t)$ tal que se minimice el funcional de costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt.$$

Con la realimentación, el sistema a lazo cerrado queda

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (9.16)$$

incurriendo en un costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + x^T(t)K^T R K x(t))dt.$$

Como sabemos que la solución de (9.16) es $x(t) = e^{(A-BK)t}x_0$, la reemplazamos en la expresión del costo, y obtenemos

$$\begin{aligned} J &= x_0^T \left(\int_0^{\infty} e^{(A-BK)^T t} (Q + K^T R K) e^{(A-BK)t} dt \right) x_0 \\ &\triangleq x_0^T P x_0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

donde hemos definido la matriz $P \triangleq \int_0^{\infty} e^{(A-BK)^T t} (Q + K^T R K) e^{(A-BK)t} dt$.

²Algebraic Riccati Equation.

Recordando el *Teorema de Lyapunov*, que viéramos en §5.4, sabemos que el sistema $\dot{x} = (A - BK)x$ es asintóticamente estable si y sólo si la matriz P definida en (9.17) es la única solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T R K = 0. \quad (9.18)$$

Por lo tanto, para *cualquier* ganancia K que estabilice asintóticamente el sistema, la matriz P solución de (9.18) dará un costo finito.

Supongamos que consideramos en particular la ganancia $K = R^{-1} B^T P$, correspondiente al candidato a control óptimo LQ (9.15). Substituyendo esta K en (9.18) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) + Q + PBR^{-1}B^T P \\ &= A^T P - PBR^{-1}B^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + PBR^{-1}B^T P \\ &= A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P, \end{aligned}$$

que es exactamente la ecuación algebraica de Riccati (CARE). Por lo tanto, la solución del problema de control óptimo LQ con horizonte infinito está dado por la solución de la ecuación (CARE), cuando ésta existe. El mismo resultado vale en el caso discreto.

Esto no quiere decir que las soluciones de las ecuaciones (CARE) o (DARE) serán únicas. Si existe una solución única que estabilice al sistema, entonces es la óptima. Cabe entonces la pregunta: ¿Cuándo existirá una solución de las ecuaciones algebraicas de Riccati, y bajo qué condiciones será única? La respuesta la dan los siguientes resultados:

Teorema 9.1. Si (A, B) es estabilizable, entonces, independientemente del peso S , existe una solución estática finita $P(S)$ de la ecuación diferencial (diferencia) de Riccati (9.14) ((9.10)). Esta solución será también una solución de la ecuación *algebraica* de Riccati correspondiente, y será la solución óptima en el caso de horizonte infinito.

Teorema 9.2. Si la matriz de peso Q puede factorizarse en la forma $Q = T^T T$, entonces la solución estática $P(S)$ de la ecuación diferencial (diferencia) de Riccati es la única solución definida positiva de la correspondiente ecuación algebraica si y sólo si (A, T) es detectable.

En conclusión, si (A, B) es estabilizable y (A, T) detectable, existe una solución única de (CARE) ((DARE)) que da la ganancia óptima de realimentación. Con MATLAB, K se puede calcular con $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ (continuo) y $K = \text{dlqr}(A, B, Q, R)$ (discreto).

9.5. Estimadores Óptimos

Uno de los factores más importantes en el desempeño de sistemas de control, a menudo no tenido en cuenta, es el efecto de perturbaciones y ruido. Todos los sistemas están sujetos a ruido, sea en la forma de

- alinealidades de entrada no modeladas,
- dinámica no modelada, o
- señales de entrada no deseadas.

En esta sección trataremos algunos modelos simples de ruido y determinaremos formas de tenerlos en cuenta en el diseño de observadores y realimentación de estados.

Consideraremos primero ruido perturbando la observación del estado de un sistema. Con un modelo en ecuaciones de estado *que incluye ruido*, generaremos el mejor observador posible, es decir, el que mejor rechaza el efecto del ruido. Estos observadores suelen llamarse *estimadores*, y el particular que desarrollaremos es el estimador conocido como el *filtro de Kalman*.

9.5.1. Modelos de sistemas con ruido

Consideramos el sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gv_k \\y_k &= Cx_k + w_k.\end{aligned}\tag{9.19}$$

Las nuevas señales de entrada v_k y w_k que aparecen en este modelo son *procesos aleatorios*, consistentes en ruido blanco estacionario, con media cero, y no correlacionados entre sí. Esto quiere decir que tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}E[v_k^T v_k] &= V & E[w_k^T w_k] &= W \\E[v_k^T v_j] &= 0, & E[w_k^T w_j] &= 0, \quad \text{cuando } k \neq j \\E[v_k] &= 0 & E[w_k] &= 0 \\E[v_j^T w_k] &= 0, \quad \text{para todo } j, k.\end{aligned}$$

La función $E[\cdot]$ denota la *media estadística* [para una breve introducción a procesos aleatorios ver por ejemplo Friedland, 1986, §10].

Consideraremos además que el estado inicial x_0 del sistema (9.19) es en también una variable aleatoria — ya que raramente podemos conocerlo con exactitud. Consideramos que es ruido blanco, con varianza

$$E[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T] \triangleq S_0.$$

Asumimos que x_0 no está correlacionado con v_k y w_k .

La entrada v_k se llama *ruido de planta*, o de *proceso*, y la entrada w_k , que actúa a la salida, *ruido de medición*. El ruido de planta modela el efecto de entradas ruidosas que actúan en los estados mismos, mientras que el ruido de medición modela efectos tales como ruido en los sensores. La entrada u_k es la habitual entrada de control, considerada determinística.

9.5.2. Filtro de Kalman discreto

Reconsideramos nuestra derivación anterior del observador, esta vez tomando en cuenta los efectos de ruido en la selección de la matriz de ganancia L . Esta matriz deberá elegirse de forma de dar la mejor estima del estado del sistema rechazando al mismo tiempo cualquier influencia de los ruidos v_k y w_k . La elección que haremos define el observador óptimo conocido como *filtro de Kalman*.

Hay varias formas de derivar el filtro de Kalman. Vamos a presentar una variante basada en un observador modificado, llamado *observador actual*, que permite una simplificación en las derivaciones (por alternativas ver, por ejemplo, Goodwin et al. [2000, §22], Friedland [1986], o Goodwin and Sin [1984]).

Observador actual

Recordemos las ecuaciones del observador de orden completo, en este caso, discreto,

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k).$$

Suponiendo por el momento que no hay ruidos ($v_k = 0 = w_k$), modificamos el observador con una ligera variante: separamos el proceso de observación en dos etapas:

1. *predicción* del estado estimado en $k + 1$ en base a datos en k (estima anterior + entrada actual),

$$\check{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (9.20)$$

2. *corrección* de la estima en $k + 1$ con los datos medidos en $k + 1$.

$$\hat{x}_{k+1} = \check{x}_{k+1} + L(y_{k+1} - C\check{x}_{k+1}) \quad (9.21)$$

La diferencia con el observador convencional es que ahora corregimos la estima con la medición "actual" ($y_{k+1} - \check{y}_{k+1}$) en vez de utilizar la medición "vieja" ($y_k - \hat{y}_k$). Este observador modificado se conoce como *observador actual* Bay [1999].

De (9.20) y (9.21), las ecuaciones del observador actual son

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_{k+1} - C(A\hat{x}_k + Bu_k)) \\ &= (A - LCA)\hat{x}_k + (B - LCB)u_k + Ly_{k+1}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

El observador actual será conveniente para derivar el filtro de Kalman discreto, pues permite considerar los efectos de los ruidos v_k y w_k por separado.

Notar que la ecuación del observador (9.22) difiere significativamente de la que presentamos anteriormente con sistemas continuos:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).$$

Para el observador actual la dinámica del error está dada por

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - LCA)\tilde{x}_k,$$

por lo que los autovalores para el observador son los de la matriz $(A - LCA)$, en vez de los de $(A - LC)$ como vimos antes. En este caso, la observabilidad del par (A, C) no garantiza que se puedan asignar los autovalores de $(A - LCA)$ arbitrariamente. Sin embargo, si la matriz A es de rango completo, el rango de CA es el mismo que el de C , y podemos considerar $\bar{C} \triangleq CA$ como una nueva matriz de salida y asignar los autovalores de $(A - L\bar{C})$ como de costumbre.

Estructura del observador

Siguiendo a Bay [1999, §11], usamos la variante del *observador actual* para derivar el filtro de Kalman. La mejor *predicción* del estado que podemos hacer cuando hay ruido es el *valor esperado*

$$\begin{aligned} \check{x}_{k+1} &= E[A\hat{x}_k + Bu_k + Gv_k] \\ &= A\hat{x}_k + Bu_k, \quad \text{dado que } E[v_k] = 0. \end{aligned}$$

Ésta suele denominarse la *estima a priori*, porque se hace antes de medir la salida (o sea que no tiene corrección). Una vez disponible la salida en el instante $k + 1$, terminamos de armar el observador actualizando la estima obteniendo la, a menudo llamada, *estima a posteriori*:

$$\hat{x}_{k+1} = \check{x}_{k+1} + L_{k+1}[y_{k+1} - C\check{x}_{k+1}]. \quad (9.23)$$

Notar que usamos una ganancia de observación L variante en el tiempo, lo que, como veremos, es necesario. En observadores determinísticos, L se seleccionaba para asignar la dinámica del error de estimación. En este caso, además, trataremos de minimizar el efecto de los ruidos.

Criterio de optimización

El filtro de Kalman es óptimo en el sentido de que da la mejor estima del estado y al mismo tiempo minimiza el efecto de los ruidos. Su derivación surge de minimizar el error de estimación *a posteriori*

$$e_k = x_k - \hat{x}_k.$$

Como e_k está afectado por ruido, y por lo tanto depende de variables aleatorias, su valor en un instante dado puede no ser representativo de las bondades de la estimación. Buscamos entonces tratar de minimizar su valor "en promedio" para todo el conjunto de ruidos posibles. Definimos entonces la *covarianza a posteriori*

$$S_k \triangleq E[e_k e_k^T].$$

Cuanto menor sea la norma de la matriz S_k , menor será la variabilidad del error de estimación debida a ruidos, y mejor el rechazo de éstos.

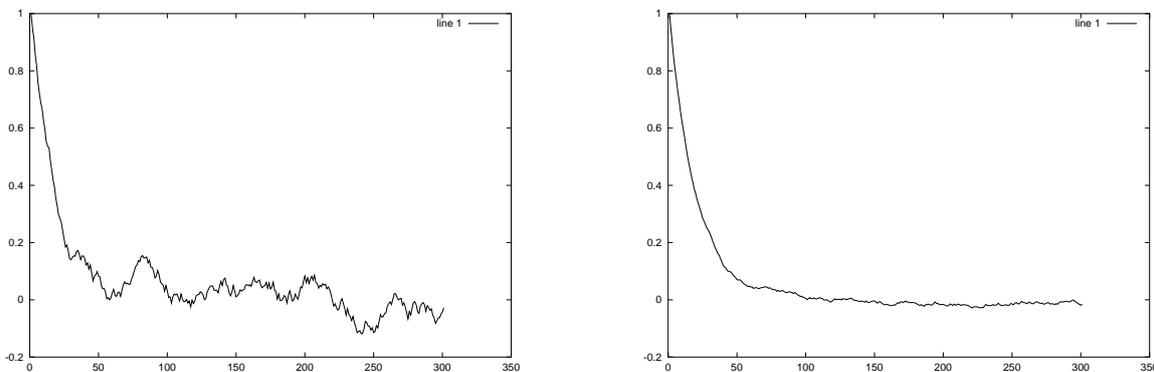


Figura 9.4: Dos señales ruidosas con mayor (iz.) y menor (der.) variabilidad.

Pretendemos determinar L_{k+1} para minimizar la variabilidad del error de estimación.

$$\begin{aligned} \min_{L_{k+1}} \|E[e_{k+1}]\|^2 &= \min_{L_{k+1}} E[e_{k+1}^T e_{k+1}] \\ &= \min_{L_{k+1}} E[\text{tr}(e_{k+1} e_{k+1}^T)] \\ &= \min_{L_{k+1}} \text{tr} E[e_{k+1} e_{k+1}^T] = \min_{L_{k+1}} \text{tr} S_{k+1}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Para obtener una expresión para S_{k+1} , derivamos la dinámica del error:

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\
&= Ax_k + Bu_k + Gv_k - A\hat{x}_k - Bu_k - L_{k+1}[Cx_{k+1} + w_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}] \\
&= Ax_k - A\hat{x}_k + Gv_k - L_{k+1}[C[Ax_k + Bu_k + Gv_k] + w_{k+1} - C[A\hat{x}_k + Bu_k]] \\
&= [A - L_{k+1}CA]e_k + [G - L_{k+1}CG]v_k - L_{k+1}w_{k+1} \\
&= [I - L_{k+1}C][Ae_k + Gv_k] - L_{k+1}w_{k+1}.
\end{aligned}$$

Usando esta expresión de e_{k+1} obtenemos

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= E \left[[(I - L_{k+1}C)(Ae_k + Gv_k) - L_{k+1}w_{k+1}] [(I - L_{k+1}C)(Ae_k + Gv_k) - L_{k+1}w_{k+1}]^T \right] \\
&= E \left[(I - L_{k+1}C)(Ae_k + Gv_k)(Ae_k + Gv_k)^T (I - L_{k+1}C)^T \right. \\
&\quad \left. - 2L_{k+1}w_{k+1} [e_k^T A^T + v_k^T G^T] (I - L_{k+1}C)^T + L_{k+1}w_{k+1} w_{k+1}^T L_{k+1}^T \right]. \tag{9.25}
\end{aligned}$$

De las hipótesis sobre las propiedades estadísticas de los ruidos vistas en § 9.5.1, tenemos que

$$E[v_k^T v_k] = V, \quad E[w_{k+1}^T w_{k+1}] = W, \quad E[w_{k+1} v_k^T] = 0. \tag{9.26}$$

Además, no es difícil ver que

$$\begin{aligned}
E[w_{k+1} e_k^T] &= E[w_{k+1} (x_k - \hat{x}_k)^T] \\
&= E[w_{k+1} x_k^T] - E[w_{k+1} \hat{x}_k^T] = 0,
\end{aligned} \tag{9.27}$$

ya que x_k y \hat{x}_k no están correlacionadas con w_{k+1} . Y por otro lado,

$$\begin{aligned}
E[v_k e_k^T] &= E[v_k (x_k - \hat{x}_k)^T] \\
&= E[v_k x_k^T] - E[v_k \hat{x}_k^T] = 0,
\end{aligned} \tag{9.28}$$

ya que x_k y \hat{x}_k tampoco están correlacionadas con v_k .³ Usando (9.26), (9.27) y (9.28) en (9.25), llegamos a la expresión

$$S_{k+1} = [I - L_{k+1}C]^T [AS_k A^T + GVG^T] [I - L_{k+1}C]^T + L_{k+1} W L_{k+1}^T \tag{9.29}$$

La expresión recursiva (9.29) representa la dinámica de la covarianza del error de estimación. Esta expresión, sin embargo, no es enteramente útil, pues todavía no conocemos L_{k+1} , que determinaremos en lo que sigue.

Determinación de la ganancia de observación óptima

Para determinar el valor de la ganancia L_{k+1} que minimiza el criterio de optimización (9.24), expandimos $\text{tr } S_{k+1}$ de (9.29) en

$$\begin{aligned}
\text{tr } S_{k+1} &= \text{tr}[AS_k A^T] + \text{tr}[GVG^T] + \text{tr}[L_{k+1}C[AS_k A^T + GVG^T]C^T L_{k+1}^T] \\
&\quad - 2 \text{tr}[L_{k+1}C[AS_k A^T + GVG^T]] + \text{tr}[L_{k+1} W L_{k+1}^T].
\end{aligned} \tag{9.30}$$

³Aunque sí lo están x_{k+1} y v_k , dado que $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gv_k$.

Ahora derivamos (9.30) con respecto a L_{k+1} . Los dos primeros términos dan cero, pues no dependen de L_{k+1} . Para los siguientes términos usamos las siguientes propiedades de la derivada de la traza de una matriz [ver Bay, 1999, Apéndice A],

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}[XYX^T] = 2XY, \quad \frac{\partial}{\partial X} \text{tr}[YXZ] = Y^T Z^T.$$

Así obtenemos de (9.30)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial L_{k+1}} \text{tr} S_{k+1} \\ &= 2L_{k+1}C[AS_kA^T + GVG^T]C^T - 2[AS_kA^T + GVG^T]C^T + 2L_{k+1}W, \end{aligned}$$

que tiene como solución

$$L_{k+1} = [AS_kA^T + GVG^T]C^T \left[C[AS_kA^T + GVG^T]C^T + W \right]^{-1} \quad (9.31)$$

Esta es la ganancia óptima para el estimador dado por la ecuación (9.23), y se conoce como la *ganancia de Kalman*. Como supusimos, es inestacionaria, ya que depende de S_k , que se obtiene resolviendo la ecuación en diferencias (9.29).

Procedimiento para computar el filtro de Kalman discreto

Resumimos los pasos necesarios para programar el filtro de Kalman. Partimos del conocimiento de las propiedades estadísticas, valor esperado y varianza, de los ruidos v_k y w_k , y la condición inicial x_0 .

1. Calculamos la estima *a priori* del estado (predicción)

$$\check{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (9.32)$$

inicializada con la estima inicial $x_{k_0} = E[x_0]$.

2. Calculamos la ganancia de Kalman de (9.31),

$$L_{k+1} = [AS_kA^T + GVG^T]C^T \left[C[AS_kA^T + GVG^T]C^T + W \right]^{-1}, \quad (9.33)$$

que inicializamos con la covarianza original $S_{k_0} = E[x_0x_0^T] = S_0$.

3. Calculamos la estima *a posteriori*, corregida con la salida medida y_{k+1} mediante (9.23), que puede simplificarse a

$$\hat{x}_{k+1} = \check{x}_{k+1} + L_{k+1}[y_{k+1} - C\check{x}_{k+1}]. \quad (9.34)$$

4. Calculamos, de (9.29), la matriz de covarianza para la próxima iteración,

$$S_{k+1} = [I - L_{k+1}C]^T [AS_kA^T + GVG^T] [I - L_{k+1}C]^T + L_{k+1}WL_{k+1}^T. \quad (9.35)$$

y el proceso se repite el siguiente paso.

Ejemplo 9.2 (Filtro de Kalman discreto). Consideremos el sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0,8146405 & 0,0817367 \\ -0,0817367 & 0,8146405 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,0021886 \\ 0,0452456 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0,0430570 \\ -0,0474342 \end{bmatrix} v_k \\ y &= [1 \ 0] x_k + w_k, \end{aligned} \quad (9.36)$$

donde el término de ruido v tiene media cero y covarianza $V = 0,09$. El ruido de medición se asume de media cero y covarianza $W = 0,25$. El sistema (9.36) es la discretización exacta, con período de muestreo $T = 0,05$ s, del sistema de tiempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} v \\ y &= [1 \ 0] x + w. \end{aligned}$$

Construimos un filtro de Kalman discreto para estimar la evolución del estado del sistema (9.36) cuando se le aplica la entrada $u = \sin kT$, con período de muestreo $T = 0,05$ s, y sobre el intervalo $kT \in [0, 10]$ s. Las ecuaciones del filtro de Kalman, (9.32), (9.33), (9.34) y (9.35), no son difíciles de programar en MATLAB, por ejemplo de la siguiente manera:

```
% Ejemplo filtro de Kalman discreto
% Sistema en tiempo continuo
Ac=[-4,2;-2,-4];
Bc=[0;1];
Gc=[1;-1];
C=[1,0];

% Discretizacion exacta - Sistema en tiempo discreto
T=0.05; % tiempo de muestreo
A=expm(Ac*T);
B=inv(Ac)*(A-eye(2,2))*Bc;
G=inv(Ac)*(A-eye(2,2))*Gc;

% Covarianzas de Ruidos
V=0.09; % ruido de proceso
W=0.025; % ruido de medicion

% Condiciones iniciales del sistema (para simular)
t=0:T:10;
u=sin(t);
x0=[0;0];
x=x0;
y=C*x0;

% Conjetura de condiciones iniciales para el filtro de kalman
xh=[0.5;-0.5]; % xh(0)
xp=xh; % xp(0)
S=eye(2,2); % S0

% Simulacion
for k=1:length(t)-1
    % sistema
```

```

x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(k)+G*sqrt(V)*randn;
y(k+1)=C*x(:,k+1)+sqrt(W)*randn;
% filtro de Kalman inestacionario
xp(:,k+1)=A*xh(:,k)+B*u(k); % estima a priori
L=(A*S*A'+G*V*G')*C'*inv(C*(A*S*A'+G*V*G')*C'+W);
xh(:,k+1)=xp(:,k+1)+L*(y(k+1)-C*xp(:,k+1)); % estima
S=(eye(2,2)-L*C)*(A*S*A'+G*V*G')*(eye(2,2)-L*C)'+L*W*L';
end

```

Corriendo este programa simulamos el sistema discreto y al mismo tiempo vamos calculando la estima del estado. La Figura 9.5 muestra la evolución de los estados del sistema y los estados estimados por el filtro de Kalman inestacionario. Puede verse como las variables ruidosas son filtradas por el estimador, dando versiones «suavizadas» de la evolución de los estados luego de un breve transitorio de aproximadamente 0.5 s.

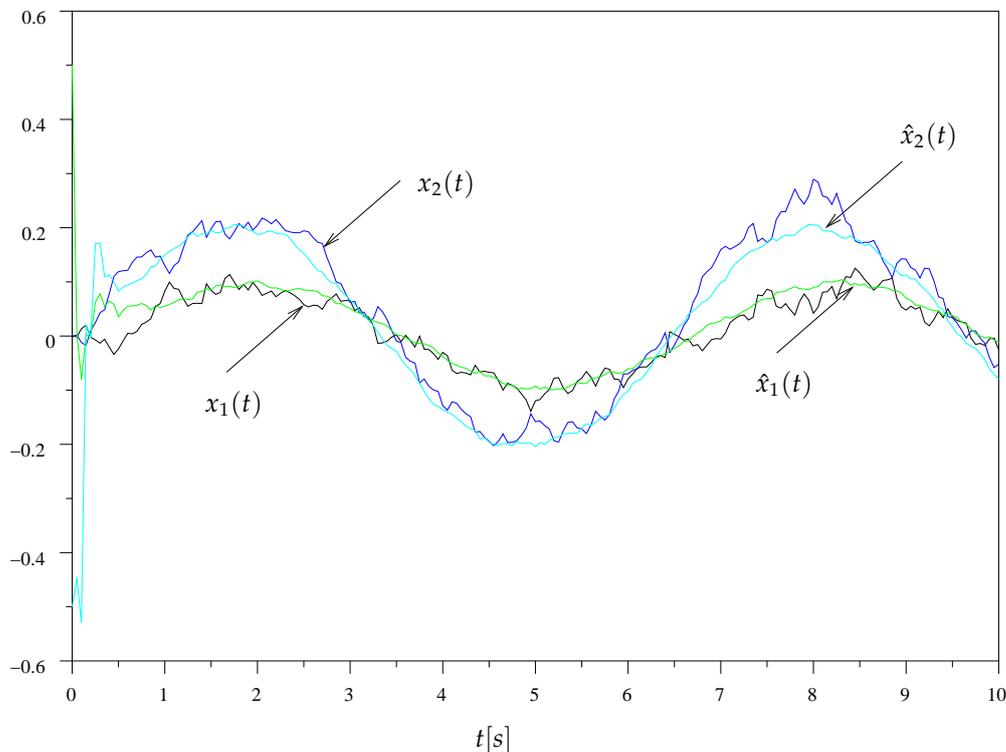


Figura 9.5: Estados verdaderos y estados estimados para el sistema (9.32)

9.6. Notas

- La ecuación diferencia de Riccati (9.29) que determina la matriz de covarianza S_k se calcula *para adelante* en el tiempo, a diferencia del dual caso de control óptimo LQ. Esto implica que el filtro de Kalman puede implementarse en su forma inestacionaria *en tiempo real*.

- El filtro de Kalman derivado es el mejor estimador si los ruidos de proceso y medición son *Gaussianos*. Para otras distribuciones probabilísticas, el filtro de Kalman es el mejor estimador *lineal*.
- El filtro de Kalman puede obtenerse también en tiempo continuo, aunque es raramente usado en la práctica, ya que casi siempre se implementa en una computadora digital, para la que la versión discreta es más natural. La derivación de las ecuaciones es similar al caso continuo, y lleva a una ecuación diferencial de Riccati, dual al caso de control LQ [ver Bay, 1999, §11.2.3].
- Como en el caso de control óptimo LQ, también en el caso del filtro de Kalman pueden calcularse soluciones estacionarias de la ecuación diferencia (diferencial) de Riccati que determina la matriz de covarianza. Esta solución será "aproximadamente óptima", y única si y sólo si (A^T, C^T) es estabilizable, y (A^T, T^T) detectable, donde $GCG^T = TT^T$.
- En MATLAB, la función `kalman` computa el filtro de Kalman estacionario (continuo o discreto).
- Naturalmente, el filtro de Kalman puede combinarse con cualquier control por realimentación de estados. Cuando el controlador elegido es el óptimo LQ, la combinación da lo que se conoce como *controlador lineal cuadrático gaussiano* (LQG).
- La robustificación de un regulador LQG mediante agregado de acción integral es exactamente igual al caso visto en asignación de polos y se aplica de la misma manera (la acción integral es parte del diseño de la *arquitectura* de control, y no del control en sí).
- Pueden verse algunas aplicaciones industriales del filtro de Kalman en Goodwin et al. [2000] (hay una copia disponible en IACI).

Útiles en MATLAB

DLQR Diseño de regulador lineal cuadrático para sistemas de tiempo discreto. $[K, S] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ calcula la ganancia óptima de realimentación de estados K tal que el control $u = -Kx$ minimiza el costo

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) dt$$

y estabiliza asintóticamente el sistema de tiempo discreto

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

La matriz S resuelve la ecuación algebraica de Riccati discreta

$$A^T S A - S - (A^T S B)(R + B^T S B)^{-1}(B^T S A) + Q = 0.$$

LQR Diseño de regulador lineal cuadrático para sistemas de tiempo continuo. $[K, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ calcula la ganancia óptima de realimentación de estados K tal que el control $u = -Kx$ minimiza el costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

y estabiliza asintóticamente el sistema de tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

La matriz P resuelve la ecuación algebraica de Riccati

$$PA + A^T P - (PB)R^{-1}(B^T P) + Q = 0.$$

DLQE Diseño de filtro de Kalman para sistemas discretos. La función $L = \text{dlqe}(A, G, C, Q, R)$ calcula la ganancia L del filtro de Kalman estacionario

$$\begin{aligned}\check{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \check{x}_{k+1} + L(y_{k+1} - C\hat{x}_k - Du_k)\end{aligned}$$

para estimar el estado x del sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + v_k\end{aligned}$$

donde w y v son ruidos de proceso y de medición, respectivamente, de media nula y con covarianzas

$$Eww^T = Q, \quad Evv^T = R, \quad Ewv^T = 0.$$

Notar que si w y v son no correlacionados (como generalmente se asume), entonces $N = 0$.

LQE Diseño de filtro de Kalman para sistemas continuos. La función $L = \text{lqe}(A, G, C, Q, R, N)$ calcula la ganancia L del filtro de Kalman estacionario

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

para estimar el estado x del sistema en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + Du + v\end{aligned}$$

donde w y v son ruido de proceso y de medición, respectivamente, de media nula y con covarianzas

$$Eww^T = Q, \quad Evv^T = R, \quad Ewv^T = N.$$

Notar que si w y v son no correlacionados (como generalmente se asume), entonces $N = 0$.

9.7. Ejercicios

Ejercicio 9.1. Para el sistema discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,1 \end{bmatrix} u_k$$

encontrar la secuencia de control que minimiza el funcional de costo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{19} x_k^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + u_k^2$$

Ejercicio 9.2. Para el sistema discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determinar el control por realimentación de estados que minimiza el criterio

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + u_i^2.$$

Ejercicio 9.3. Para el sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [0,5 \quad 1] x_k$$

diseñar una realimentación de estados para ubicar los autovalores a lazo cerrado en $z = 0,25 \pm 0,25j$. Diseñar un observador de orden completo estándar, y uno *actual*. Programar ambos en MATLAB y comparar sus desempeños mediante simulación.

Ejercicio 9.4. La medición ruidosa en tiempo discreto de una constante desconocida α satisface el modelo

$$y_k = \alpha + v_k,$$

donde v_k es ruido blanco de varianza σ^2 .

1. Determinar un filtro óptimo para estimar α .
2. Construir un esquema SIMULINK para evaluar el filtro anterior en régimen permanente.

Ejercicio 9.5. Considerar el problema de medición en tiempo discreto de una senoide de frecuencia conocida pero amplitud y fase desconocidas, es decir:

$$y_k = A \operatorname{sen}(\omega_0 k + \alpha) + v_k,$$

donde v_k es ruido blanco de varianza σ^2 .

1. Contruir un modelo para generar la senoide.
2. Determinar un filtro óptimo para estimar A y α .
3. Construir un esquema SIMULINK para evaluar el filtro en régimen permanente.

Bibliografía

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Pub. Co., 1992.
- B. Friedland. *Control System Design*. McGraw-Hill, 1986.
- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2000.
- G.C. Goodwin and K.S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- Ricardo Sánchez Peña. *Introducción a la teoría de control robusto*. Asociación Argentina de Control Automático, 1992.
- M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.
- C.F. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(3):395–404, June 1978.