

1. Un PLL («phase-locked loop») es un dispositivo en realimentación que genera una oscilación cuya fase sigue a una señal de referencia (útil para generar señales moduladas en fase). Puede representarse con el diagrama de bloques de la Figura 1. Sea  $(A, B, C)$  una realización mínima

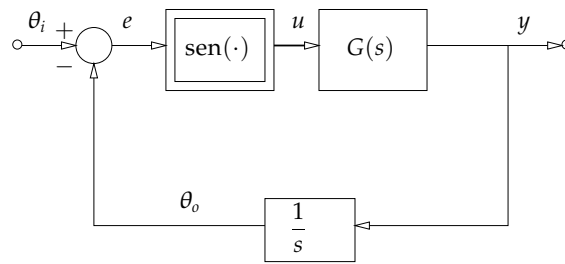


Figura 1: PLL

de la función transferencia de orden  $m$ , escalar y estrictamente propia,  $G(s)$ . Asumir que todos los autovalores de  $A$  tiene parte real negativa,  $G(0) \neq 0$ , y  $\theta_i$  es constante. Si  $z$  es el estado de la realización  $(A, B, C)$ ,

1. Mostrar que el sistema a lazo cerrado puede representarse por la ecuación

$$\dot{z} = Az + B \operatorname{sen} e$$

$$\dot{e} = -Cz.$$

2. Encontrar todos los PE del sistema y determinar su tipo.  
 3. Mostrar que cuando  $G(s) = 1/(\tau s + 1)$  el lazo cerrado coincide con el modelo de la ecuación de un péndulo.
2. Para cada uno de los siguientes sistemas encontrar todos los PE y determinar el tipo de cada PE aislado.

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{x_1^3}{6} - x_2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0,1x_1 - 2x_2 - x_1^2 - 0,1x_1^3 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 - x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1 + x_1} \\ \dot{x}_2 &= \left(2 - \frac{x_2}{1 + x_1}\right)x_2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) \end{aligned}$$

3. Encontrar todos los PE del sistema

$$\dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$$

para todos los valores positivos de  $a, b, c$  y determinar el tipo de cada equilibrio.

4. El sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{x_2}{\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1}{\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

tiene un PE en el origen.

1. Linealizar el sistema alrededor del origen y encontrar el tipo del origen como PE.
2. Obtener el retrato de fase del sistema no lineal cerca del origen y mostrar que se asemeja al de un foco estable. **Ayuda:** transformar las ecuaciones a coordenadas polares.
3. Explicar la discrepancia entre 1 y 2.

5. Para el sistema

$$\dot{x}_1 = -(x_1 - x_1^2) + 1 - x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = -(x_2 - x_2^2) + 1 - x_1 - x_2$$

1. Encontrar todos los PE y determinar su tipo.
2. Obtener el retrato de fase, preferentemente usando simulación en computadora, y discutir el comportamiento cualitativo del sistema.