1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz en un dominio $D \subset \mathbb{R}^N$. Sea $S \subset D$ un conjunto compacto (cerrado y acotado). Mostrar que existe una constante $L > 0$ tal que

   $$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in S.$$

   Ayuda: Por ser compacto, el conjunto S puede cubrirse por un número finito de entornos:

   $$S \subset N(a_1, r_1) \cup N(a_2, r_2) \cup \cdots \cup N(a_k, r_k).$$

   Considerar los dos casos siguientes por separado:

   - $x, y \in S \cap N(a_i, r_i)$ para algún $i \in [1, 2, \ldots, k]$.
   - $x, y \notin S \cap N(a_i, r_i)$ para ningún $i \in [1, 2, \ldots, k]$; en este caso notar que $\|x - y\| \geq \min_i r_i$ y usar el hecho de que $f(x)$ está uniformemente acotada en S.

2. Recordar que una función $f : S_1 \to S_2$ se dice *continua* en un punto $x \in S_1$ si dada una constante $\varepsilon > 0$ existe alguna constante $\delta > 0$ tal que

   $$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

   Una función f es continua en un conjunto S si es continua en todo punto de S, y es *uniformemente continua* en S si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ — dependiente sólo de ε — tal que la desigualdad vale para todo $x, y \in S$.

   Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz en $W \subset \mathbb{R}^n$, entonces $f(x)$ es uniformemente continua en W.

3. Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz en un dominio $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ y $f(0) = 0$, entonces existe una constante $k > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in D$.

4. Sea el problema de valor inicial

   (1) $\quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$

   y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene $x = 0$. Suponer que $f(t, 0) = 0$ y $f(t, x)$ es Lipschitz en x sobre $[t_0, \infty) \times D$ con constante de Lipschitz L en $\| \cdot \|_2$, y que la solución $x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$ y pertenece a D.

   (a) Mostrar que

   $$\left| \frac{d}{dt} \left[x^T(t) x(t) \right] \right| \leq 2L\|x(t)\|_2^2.$$

   (b) Mostrar que

   $$\|x_0\|_2 \, e^{-L(t-t_0)} \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 \, e^{L(t-t_0)}$$

5. Sea $D_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$. Para cada uno de los siguientes sistemas representados como $\dot{x} = f(t, x)$ e introducidos en el Capítulo 1 determinar si f es: (a) localmente Lipschitz en $x \in D_r$ para r suficientemente pequeño; (b) localmente Lipschitz en $x \in D_r$ para cualquier $r > 0$ finito; (c) globalmente Lipschitz en x.

   (a) La ecuación del péndulo con entrada de control.

   (b) El circuito con diodo túnel.

   (c) El sistema de masa-resorte con resorte lineal, amortiguamiento viscoso, fricción estática y fuerza externa nula.

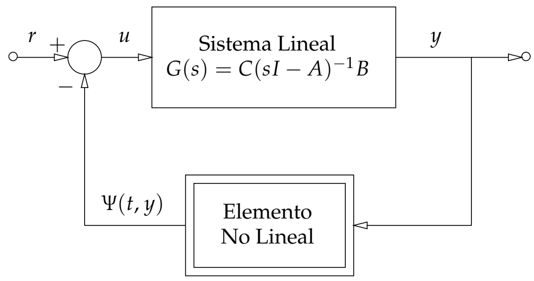
(d) El oscilador de Van der Pol.

(e) La ecuación de estado a lazo cerrado de tercer orden del ejemplo de control adaptable.

(f) El sistema $\dot{x} = Ax - B\psi(Cx)$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ son matrices constantes y $\psi(\cdot)$ es una *alinealidad de zona muerta*, definida por

$$\psi(y) = \begin{cases} y + d, & \text{para } y < -d \\ 0, & \text{para } -d \le y \le d \\ y - d, & \text{para } y > d \end{cases}$$

(Este sistema representa un sistema lineal realimentado con alinealidad estática, como se ve en la figura, en particular con ψ estacionaria y $r = 0$.)



6. Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x sobre $[t_0, t_1] \times D$ para algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea W un subconjunto compacto de D. Sea $x(t)$ la solución de $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0 \in W$. Asumiendo que $x(t)$ está definida y pertenece a W para todo $t \in [t_0, T)$, $T < t_1$, mostrar que

   (a) $x(t)$ es uniformemente continua sobre $[t_0, T)$,

   (b) $x(T)$ está definida y pertenece a W, y que entonces $x(t)$ es una solución sobre $[t_0, T]$,

   (c) existe $\delta > 0$ tal que la solución $x(t)$ pueda extenderse sobre $[t_0, T + \delta]$.

7. Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x sobre $[t_0, t_1] \times D$ para algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $y(t)$ una solución de (1) sobre un intervalo abierto máximo $[t_0, T) \subset [t_0, t_1]$ con $T < \infty$. Sea W cualquier conjunto compacto de D. Mostrar que existe algún $t \in [t_0, T)$ tal que $y(t) \notin W$.

   Ayuda: Usar el ejercicio anterior.

8. Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t, localmente Lipschitz en x, y

$$\|f(t, x)\| \le k_1 + k_2\|x\|, \qquad (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

   (a) Mostrar que la solución de (1) satisface

$$\|x(t)\| \le \|x_0\|\, e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2(t-t_0)} - 1\right)$$

   para todo $t \ge t_0$ para el cual la solución existe.

   (b) ¿Puede haber escape en tiempo finito de la solución?