1. Sea el sistema escalar $\dot{x} = ax^p + g(x)$, donde p es un entero positivo y $g(x)$ satisface $|g(x)| \leq k|x|^{p+1}$ en algún entorno del origen $x = 0$.
   (a) Mostrar que el origen es AS si p es impar y $a < 0$.
   (b) Mostrar que el origen es inestable si p es impar y $a > 0$ o p es par y $a \neq 0$.

2. Para cada uno de los siguientes sistemas usar una candidata a función de Lyapunov cuadrática para mostrar que el origen es AS. Luego investigar si el origen es GAE.

   (a)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2\\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

   (d)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3\end{aligned}$$

3. Usando $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ estudiar la estabilidad del origen del sistema
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + k^2)\\ \dot{x}_2 &= -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$
   (a) Cuando $k = 0$.
   (b) Cuando $k \neq 0$.

4. Usando el método del gradiente variable, encontrar una función de Lyapunov $V(x)$ para mostrar estabilidad asintótica del origen del sistema
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2) - \operatorname{sen}(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

5. Sea $V(x) = x_1^2/(1 + x_1^2) + x_2^2$ y sea el sistema de segundo orden
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2}\end{aligned}$$
   (a) Mostrar que $V(x) > 0$ y $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$.
   (b) Sea la hipérbola $x_2 = 2/(x_1 - \sqrt{2})$. Mostrar, investigando el campo vectorial sobre la frontera de esta hipérbola, que las trayectorias a la derecha de la rama en el primer cuadrante no pueden cruzar esa rama.
   (c) Mostrar que el origen no es globalmente asintóticamente estable.

   Ayuda: En la parte (b) mostrar que $\dot{x}_2/\dot{x}_1 = -1/(1 + 2\sqrt{2}x_1 + 2x_1^2)$ sobre la hipérbola, y comparar con la pendiente de las tangentes a la hipérbola.

6. Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \mathrm{sat}(2x_1 + x_2).$$

   (a) Mostrar que el origen es asintóticamente estable.
   (b) Mostrar que todas las trayectorias que comienzan a la derecha de la curva $x_1 x_2 = c$ (con $c > 0$ suficientemente grande) no pueden alcanzar el origen.
   (c) Mostrar que el origen no es GAE.

   Ayuda: En la parte (b) considerar $V(x) = x_1 x_2$; calcular $\dot{V}(x)$ y mostrar que sobre la curva $V(x) = c$ la derivada $\dot{V}(x) > 0$ cuando c es suficientemente grande.

7. **Método de Krasovskii.** Sea el sistema $\dot{x} = f(x)$ con $f(0) = 0$, con $f(x)$ continuamente diferenciable y tal que el Jacobiano $[\partial f/\partial x]$ satisface

$$P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right]^T P \leq -I, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{donde } P = P^T > 0.$$

   (a) Usando la representación $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x)x\, d\sigma$, mostrar que

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leq -x^T x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

   (b) Mostrar que $V(x) = f^T(x) P f(x)$ es definida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Mostrar que $V(x)$ es radialmente no acotada.
   (d) Usando $V(x)$ como candidata a función de Lyapunov, mostrar que el origen es GAE.

8. Mostrar que el origen del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^6$$
$$\dot{x}_2 = x_2^3 + x_1^6$$

   es inestable.