1. Mostrar que el origen del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1^6 - x_2^3\end{aligned}$$

es inestable.

Ayuda: Mostrar que el conjunto $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1\} \cap \{x_2 \geq x_1^3\} \cap \{x_2 \leq x_1^2\}$ es no vacío y positivamente invariante. Luego investigar el comportamiento de las trayectorias dentro de Γ.

2. Dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \operatorname{sat}(x_2^2 - x_3^2)\\ \dot{X}_3 &= x_3 \operatorname{sat}(x_2^2 - x_3^2)\end{aligned}$$

donde $\operatorname{sat}(\cdot)$ es la función saturación, mostrar que el origen es el único PE y usar $V(x) = x^T x$ para mostrar que es GAE.

3. Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (x_1 x_2 - 1)x_1^3 + (x_1 x_2 - 1 + x_2^2)x_1\\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

(a) Mostrar que $x = 0$ es el único punto de equilibrio.
(b) Mostrar, por linealización, que $x = 0$ es AE.
(c) Mostrar que $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 2\}$ es positivamente invariante en el primer cuadrante.
(d) ¿Es el equilibrio GAE? Justificar la respuesta.

4. Mostrar que el origen de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

es AE y estimar la región de atracción.

5. Para cada uno de los siguientes sistemas usar linealización para mostrar que el origen es AE. Luego mostrar que el origen es GAE.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2)\operatorname{sen} x_1 - 3x_2\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -a x_1 - b x_2, \qquad a, b > 0.\end{cases}$$

6. Mostrar que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2\\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1(3 - x_1 x_2)\end{aligned}$$

tiene un equilibrio GAE.

Ayuda: Encuentre el equilibrio y haga un cambio de coordenadas $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ para correrlo al origen. Luego use una función de la forma

$$V(y_1, y_2) = k_1 \frac{y_1^2}{2} + k_2 \frac{y_2^2}{2} + k_3 \frac{y_1^4}{4}$$

para mostrar que el origen es GAE en las coordenadas (y_1, y_2).