

1. Dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 + 3t + 2 - 3x_1 - 2(t+1)x_2\end{aligned}$$

(a) Verificar que $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1$ es una solución.

(b) Mostrar que si $x(0)$ está suficientemente cerca de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces $x(t)$ se aproxima a $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ a medida que $t \rightarrow \infty$.

2. Considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(t)x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

donde $g(t)$ es continuamente diferenciable y $|g(t)| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Mostrar que el origen es uniformemente asintóticamente estable. ¿Es el origen globalmente uniformemente asintóticamente estable?

3. Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - g(t)x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - g(t)x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

donde $g(t)$ es una función continuamente diferenciable, acotada, y $g(t) \geq k > 0$ para todo $t \geq 0$. ¿Es el origen uniformemente asintóticamente estable? ¿Es exponencialmente estable?

4. Considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + (x_1^2 + x_2^2) \sin t \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \cos t.\end{aligned}$$

Mostrar que el origen es exponencialmente estable y estimar la región de atracción.