1. Sea la ecuación de Lyapunov $PA + A^TP = -Q$, donde $Q = Q^T > 0$ y A es Hurwitz. Sea $\mu(Q) = \lambda_{\text{mín}}(Q)/\lambda_{\text{máx}}(P)$.
   (a) Mostrar que $\mu(kQ) = \mu(Q)$ para cualquier número positivo k.
   (b) Sea $\hat{Q} = \hat{Q}^T > 0$ tal que $\lambda_{\text{mín}}(\hat{Q} = 1$. Mostrar que $\mu(I) \geq \mu(\hat{Q})$.
   (c) Mostrar que $\mu(I) \geq \mu(Q)$ para toda $Q = Q^T > 0$.

   Ayuda: Para la parte (b), si P_1 y P_2 son las soluciones de la ecuación de Lyapunov para $Q = I$ y $Q = \hat{Q}$ respectivamente, mostrar que

   $$P_1 - P_2 = \int_0^\infty e^{A^Tt}(I - \hat{Q})e^{At}\,dt \leq 0.$$

2. Sea el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ y sea $u = Fx$ una realimentación de estados estabilizante; es decir, tal que la matriz $(A + BF)$ es Hurwitz. Supongamos que, debido a limitaciones físicas, debemos usar un limitador para evitar que el valor de las componentes u_i de u no superen en valor absoluto el máximo preestablecido $L > 0$, o sea que $|u_i(t)| \leq L$.

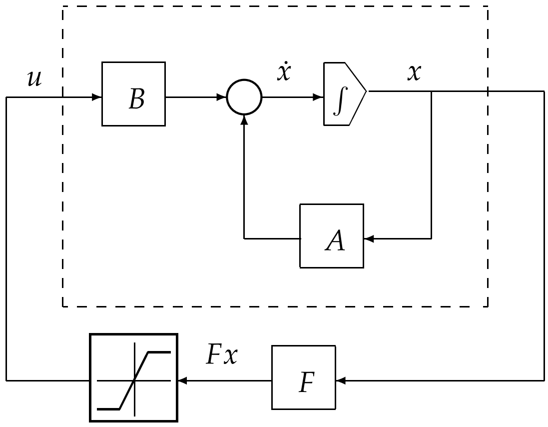

Figura 1: Realimentación de estados saturada

El sistema a lazo cerrado, ilustrado en la Figura 1, puede representarse por

$$\dot{x} = Ax + BL\,\text{sat}(Fx/L),$$

donde $\text{sat}(v)$ es un vector cuya componente i-ésima es la función saturación

$$\text{sat}(v_i) = \begin{cases} -1, & \text{para } v_1 < -1 \\ v_i, & \text{para } |v_i| \leq 1 \\ 1, & \text{para } v_i > 1 \end{cases}$$

Sumando y restabdo el término BFx, podemos reescribir el sistema lazo cerrado como

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bh(Fx),$$

donde $h(v) = L\,\text{sat}(v/L) - v$. Así, el efecto del limitador puede verse como una perturbación del sistema sin nominal sin limitaciones en la entrada.
   (a) Mostrar que $|h_i(v)| \leq \delta/(1+\delta)|v_i|$ si $|v_i| \leq L(1+\delta)$.
   (b) Sea P la solución de $P(A + BF) + (A + BF)^TP = -I$. Mostrar que la derivada de $V(x) = x^TPx$ a lo largo de las trayectorias del sistema a lazo cerrado es definida negativa en la región $\{x : |(Fx)_i| \leq L(1+\delta)\}$ si $\delta/(1+\delta) < 1/(2\|PB\|_2\|F\|_2)$.

(c) Mostrar que el origen es asintóticamente estable y discutir cómo puede estimarse la región de atracción.

(d) Aplicar los resultados anteriores al caso

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1{,}9 \end{bmatrix},$$

y $L = 1$. Estimar la región de atracción del origen.

3. Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[\left(\operatorname{sen} x_2 \right)^2 - 1 \right] x_1 \\ \dot{x}_2 &= -b x_1 - (1+b) x_2. \end{aligned}$$

(a) Con $b = 0$, mostrar que el origen es exponencialmente estable y globalmente asintóticamente estable.

(b) Con $b \neq 0$, mostrar que el origen es exponencialmente estable para $|b|$ suficientemente pequeño, pero que no puede ser GAS por más pequeño que sea $|b|$.

(c) Discutir los resultados de las partes (a y (b) en relación a los resultados de perturbación de puntos de PE, y mostrar que cuando $b = 0$ el origen no es globalmente exponencialmente estable.

4. Investigar la estabilidad entrada-estado (ISS) de cada uno de los siguientes sistemas escalares

$$\dot{x} = -(1+u)x^3, \qquad \dot{x} = -(1+u)x^3 - x^5,$$

$$\dot{x} = -x + x^2 u, \qquad \dot{x} = x - x^3 + u.$$

5. Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left[\left(\operatorname{sen} \frac{\pi x_2}{2} \right)^2 - 1 \right] \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u. \end{aligned}$$

(a) Con $u = 0$, mostrar que el origen es GAS.

(b) Mostrar que para cualquier entrada acotada $u(t)$, el estado $x(t)$ es acotado.

(c) Con $u(t) \equiv 1$, $x_1(0) = a$, y $x_2(0) = 1$, mostrar que la solución es $x_1(t) \equiv a$,$x_2(t) \equiv 1$.

(d) Es el sistema ISS?