

## 带有随机通信时滞的状态估计

杨园华<sup>1</sup> 付敏跃<sup>2</sup> 张焕水<sup>1</sup>

**摘要** 研究了测量值不带时间戳的网络控制系统的最优状态估计问题. 当最大的随机时滞界是一步滞后时, 对可能存在的乱序测量提出新的测量模型. 基于每一时刻收到的所有测量值的平均值构造估计器以保证不稳定网络控制系统的估计器是线性无偏的及估计误差协方差一致有界, 并通过求解离散黎卡提方程得到估计器增益. 在无偏性及误差协方差一致有界的意义下保证估计器是最优的. 最后给出仿真实例验证了该算法的有效性.

**关键词** 状态估计, 网络控制系统, 随机时滞, 黎卡提方程

**引用格式** 杨园华, 付敏跃, 张焕水. 带有随机通信时滞的状态估计. 自动化学报, 2013, 39(3): 237–243

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00237

### State Estimation Subject to Random Communication Delays

YANG Yuan-Hua<sup>1</sup> FU Min-Yue<sup>2</sup> ZHANG Huan-Shui<sup>1</sup>

**Abstract** The state estimation problem is studied for the networked control systems subject to random communication delays and the measurements without time stamps. With the random delay bounded by one step only, a new measurement model is proposed for possibly out-of-sequence measurements. For unstable systems, to guarantee that the estimator is linear unbiased and the estimation error covariance is uniformly bounded, we show that the estimator structure is given based on the average of all received measurements at each time. The estimator gains can be derived by solving a set of recursive discrete-time Riccati equations. The estimator is guaranteed to be optimal in the sense that it is unbiased with uniformly bounded estimation error covariance. A simulation example shows the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words** State estimation, networked control systems, random time delay, Riccati equations

**Citation** Yuan-Hua Yang, Min-Yue Fu, Huan-Shui Zhang. State estimation subject to random communication delays. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 237–243

近十几年来, 网络控制系统在网络通信、控制及状态估计等方面得到广泛的关注<sup>[1–3]</sup>. 在网络控制系统中, 数据传输通过通信网络从传感器到控制器, 再从控制器到执行器的过程中, 由于受有限网络带宽的直接影响, 使传输数据在网络传输过程中不可避免地出现随机通信时滞、无序测量及数据包丢失, 所以应正确处理这些问题以保证系统达到优良的估计和控制性能<sup>[4–7]</sup>.

最近, 带有随机时滞的网络控制系统的估计问题的研究取得了一定进展<sup>[8–21]</sup>. 在每一采样时刻,

系统输出由网络系统的传感器测量并传输到估计器端. 由于网络拥塞, 会导致在估计器端收到的观测带有随机时滞. 然而, 标准的 Kalman 滤波不能直接应用到随机时滞输出系统中, 现有结果主要有两种方法来处理随机时滞, 一种方法是利用时间戳来刻画测量值, 另一种方法是不带时间戳, 借助随机变量的统计特性来刻画测量值. 当收到的测量值是乱序的时候通常用时间戳对数据包重新排序. 文献 [17] 考虑了带有时间戳的测量, 并将时间戳封装在数据包中一起经过数字通信网络传输, 在估计器端将测量值重新排序从而得到最优估计器. 文献 [18] 研究了测量值带有时间戳并且保证每一时刻只收到一个测量值的时变时滞离散系统的最优估计问题. 当不利用时间戳时, 文献 [20] 利用概率已知的 Bernoulli 分布的随机变量来描述网络数据传输中可能存在的随机测量时滞和丢包现象, 研究了有界随机时滞和丢包系统的估计问题. 文献 [21] 研究了具有一步随机时滞和丢包的网路系统的最优线性估计问题.

对于没有时间戳的情况, 常用的模型假设在每一时刻  $k$  只收到一个随机时滞测量值, 即  $\hat{y}_k = y_{k-\tau_k}$ , 其中  $\hat{y}_k$  是  $k$  时刻的系统测量,  $y_{k-\tau_k}$  是被收到的测量,  $\tau_k \in \{0, 1, \dots, N\}$  是最大时滞为  $N$  的随机时滞, 此模型已经得到了广泛应用<sup>[19–22]</sup>.

收稿日期 2012-04-24 录用日期 2012-12-06  
Manuscript received April 24, 2012; accepted December 6, 2012  
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2009CB320600), 国家自然科学基金 (61120106011, 61104050, 61203029), 山东省自然科学基金 (ZR2011FQ020) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2009CB320600), National Natural Science Foundation of China (61120106011, 61104050, 61203029), and Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2011FQ020)

本文责任编辑 方海涛

Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao

1. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061 2. 纽卡斯尔大学电气工程与计算机科学学院 澳大利亚新南威尔士州纽卡斯尔市 2308

1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China 2. School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Newcastle, Callaghan NSW 2308, Australia

该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 3, pp. 237–243, 2013.

但是在实际的网络通信系统中这个模型并不适用, 因为同一个测量值允许多次重复收到, 并且丢包率过高. 为了验证此模型的缺陷, 我们假设最大时滞  $N = 1$  的情况, 并设  $\rho_0 = \rho_1 = 0.5$ , 于是得到  $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k$  的概率是 0.5,  $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k$  的概率也是 0.5. 由于  $\mathbf{y}_k$  只能在  $k$  时刻或  $k+1$  时刻被收到, 显然  $\mathbf{y}_k$  丢包的概率等于  $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_{k-1}$  和  $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k$  的概率, 即 0.25. 因此, 任何的网络协议都不可能允许产生如此高的丢包概率或者允许重复收到测量值.

由于网络传输负载能力有限, 合理利用网络资源的有效方法之一是同一个测量不应该重复被收到. 同时, 由于时滞是随机的, 在两个连续的采样间隔可能没有数据包到达, 也有可能多个数据包一起到达接收端, 这意味着数据包会一涌而来, 甚至在接收端是时序错乱的. 目前, 对利用不带时间戳的通信模型的估计问题的报道还较为少见.

本文假设在每一采样时刻收到的测量序列不带时间戳, 首先给出一个新的时滞测量模型, 该模型克服了以前模型的缺点, 即避免重复收包和丢包, 并且更适合实际的网络通信协议. 然后, 设计了满足无偏性且估计误差协方差一致有界的估计器. 在每个采样时刻, 利用收到的所有测量值的平均值给出系统的新的状态估计器. 并得到最优估计器, 最后通过一个仿真验证了本文方法的有效性. 为了技术上简单但是不改变其核心困难, 我们只考虑最大时滞界是一步时滞的情况.

## 1 问题的描述

考虑如下离散时间线性随机系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = C\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^l$  为被测输出,  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbf{R}^l$  分别为系统噪声和测量噪声,  $A, C$  是具有适当维数的常矩阵且  $(A, C)$  是可观测的, 初始状态  $\mathbf{x}_0$  和  $\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k$  分别是均值为  $(\bar{x}_0, 0, 0)$ , 方差为  $(P_0, Q_k, R_k)$  的互不相关的高斯白噪声.

本文考虑的是测量值不带时间戳的情况, 即由于随机时滞的影响, 无法得知收到测量值的正确时序. 下面仅仅考虑最大随机时滞  $N = 1$  的情况, 即随机时滞可能是 0 或 1. 假设没有丢包和重复收包的现象发生, 给出时滞状态转移图如图 1 所示.

图 1 中,  $m$  是  $k$  时刻发生时滞的测量值的个数,  $r$  是  $k$  时刻收到数据包的个数. 箭头表示从  $k$  时刻到  $k+1$  时刻个数  $m$  的变化. 从图 1 中可以看出以下几种情况:

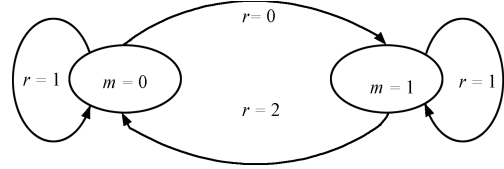


图 1 随机时滞的状态转移图

Fig. 1 The state transition for random time-delay

1) 在  $k$  时刻  $m = 0$ , 这意味着测量值  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$  全部被接收到. 从图 1 中可以看出, 根据收到测量值的个数  $r$  可以分为以下两种情况:

**情况 1.** 当  $r = 0$  时, 此时没有数据包到达, 即发生时滞, 那么, 在  $k+1$  时刻  $m = 1$ , 箭头由  $m = 0$  指向  $m = 1$ ;

**情况 2.** 当  $r = 1$  时, 数据包  $\mathbf{y}_k$  准时收到, 那么, 在  $k+1$  时刻  $m = 0$ , 箭头由  $m = 0$  指向  $m = 0$ .

2)  $m = 1$  时, 即在  $k-1$  时刻  $\mathbf{y}_{k-1}$  没被接收到, 从而在  $k$  时刻发生时滞. 于是在图 1 中, 根据收到测量值的个数  $r$  又可以分为以下两种情况:

**情况 3.** 当  $r = 1$  时, 由于考虑没有丢包发生, 所以在  $k$  时刻一定收到  $\mathbf{y}_{k-1}$  而没有收到  $\mathbf{y}_k$ , 那么, 在  $k+1$  时刻得到  $m = 1$ . 从而箭头由  $m = 1$  指向  $m = 1$ ;

**情况 4.** 当  $r = 2$  时, 收到的测量值必定是  $\mathbf{y}_k$  和  $\mathbf{y}_{k-1}$  (但是不知道其先后顺序). 那么, 在  $k+1$  时刻  $m = 0$ , 箭头由  $m = 1$  指向  $m = 0$ .

对以上这四种情况, 可以得知当  $r = 0$  或 1, 可以准确推知收到的测量值, 所以情况 1~情况 3 可以很容易地得到估计器. 但是对情况 4, 由于不知道序列到达的正确顺序, 所以很难得到估计器. 下面先给出情况 4 的状态估计器的设计.

## 2 测量乱序时的估计器设计

情况 4 的问题具体描述如下: 在  $k-1$  时刻, 测量值  $\mathbf{y}_{k-1}$  没有到达接收端, 但是在  $k$  时刻有两个观测输出一起到达即  $\{\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_k\}$ . 由于缺少时间戳, 不知道  $\mathbf{y}_{k-1}$  和  $\mathbf{y}_k$  到达的先后顺序, 因此在  $k$  时刻这两个测量数据包有两种可能的排序情况, 即:

1) 数据包以正确的顺序到达接收端:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}$$

2) 数据包到达接收端时次序颠倒:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_{k-1} \end{bmatrix}$$

那么, 估计器端所收到的测量值可通过如下模型来

描述:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^{(1)} \\ \mathbf{y}_k^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k^{(1)} &= (1 - \gamma_k)\mathbf{y}_{k-1} + \gamma_k\mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_k^{(2)} &= \gamma_k\mathbf{y}_{k-1} + (1 - \gamma_k)\mathbf{y}_k \end{aligned} \quad (4)$$

$\gamma_k$  是取值为 0 或 1 的标量, 其概率分别是

$$\begin{aligned} p &= Pr\{\gamma_k = 1\}, \quad 1 - p = Pr\{\gamma_k = 0\} \\ E\gamma_k^2 &= E\gamma_k^2 = p \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $0 < p < 1$ .

我们要设计的线性状态估计器的形式如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k\hat{\mathbf{x}}_k + [H_{k1} \ H_{k2}]\tilde{\mathbf{y}}_k \quad (6)$$

并定义估计误差和误差协方差形式如下:

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (7)$$

$$\bar{P}_{k+1} = E_x E_{\gamma_k}[\mathbf{e}_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}^T] \quad (8)$$

其中,  $E_x$  是对  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{x}_0$  取的期望值;  $E_{\gamma_k}$  是对  $\gamma_k$  取期望.

设计状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  使得估计误差协方差 (8) 最小以得到最优估计器, 同时要求估计器是无偏的, 即满足  $E_x E_{\gamma_k} \mathbf{e}_{k+1} = 0$ , 并满足估计误差协方差是一致有界的. 协方差一致有界的定义如下.

**定义 1.** 如果存在一个不依赖于  $P_0$  的常数  $M > 0$ , 使得:

$$\bar{P}_k \leq M \quad (9)$$

对所有的  $k = 0, 1, 2, \dots$  都成立, 则称误差协方差是一致有界的.

将式 (1)、(3) 及 (6) 代入如式 (7) 所定义的估计误差  $\mathbf{e}_{k+1}$  中, 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \\ &A^2\mathbf{x}_{k-1} + A\mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_k - F_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \\ &[H_{k1} \ H_{k2}] \begin{bmatrix} (1 - \gamma_k)C + \gamma_k CA \\ \gamma_k C + (1 - \gamma_k)CA \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} - \\ &[H_{k1} \ H_{k2}] \times \\ &\begin{bmatrix} (1 - \gamma_k)\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \gamma_k C\mathbf{v}_{k-1} + \gamma_k \boldsymbol{\omega}_k \\ \gamma_k \boldsymbol{\omega}_{k-1} + (1 - \gamma_k)C\mathbf{v}_{k-1} + (1 - \gamma_k)\boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

由估计的无偏性质  $E_x E_{\gamma_k} \mathbf{e}_{k+1} = 0$ , 及式 (5) 中  $\gamma_k$  的特性和噪声均值为 0, 可得:

$$F_k = A^2 - [H_{k1} \ H_{k2}] \begin{bmatrix} (1 - p)C + pCA \\ pC + (1 - p)CA \end{bmatrix} \quad (11)$$

将其代入式 (10), 则误差转化为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \\ &\begin{bmatrix} A^2 - [H_{k1} \ H_{k2}] \begin{bmatrix} (1 - p)C + pCA \\ pC + (1 - p)CA \end{bmatrix} \\ [H_{k1} \ H_{k2}] \begin{bmatrix} p - \gamma_k C + (\gamma_k - p)CA \\ (\gamma_k - p)C + (p - \gamma_k)CA \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{e}_{k-1} - \\ &[H_{k1} \ H_{k2}] \times \\ &\begin{bmatrix} (1 - \gamma_k)\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \gamma_k C\mathbf{v}_{k-1} + \gamma_k \boldsymbol{\omega}_k \\ \gamma_k \boldsymbol{\omega}_{k-1} + (1 - \gamma_k)C\mathbf{v}_{k-1} + (1 - \gamma_k)\boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix} + \\ &A\mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (12)$$

**引理 1.** 考虑估计误差动态方程 (12), 假设  $A$  是不稳定的, 则估计误差是无偏的且误差协方差是一致有界的必要条件是对所有的  $k$  都有  $H_{k1} = H_{k2}$ . 进而得到最优估计器的形式如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k\hat{\mathbf{x}}_k + H_k \frac{1}{2}(\mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{y}_k) \quad (13)$$

即估计器利用的是测量值  $\mathbf{y}_{k-1}$  和  $\mathbf{y}_k$  的平均值.

**证明.** 为了保证估计器的无偏性, 我们得到式 (11) 和 (12). 由于假设系统矩阵  $A$  是不稳定的, 所以当  $k \rightarrow \infty$  时,  $E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] \rightarrow \infty$ . 由噪声互不相关及式 (5), 利用定义 1, 估计误差协方差的期望是一致有界的当且仅当

$$E_{\gamma_k}[\Delta(\gamma_k)\Delta^T(\gamma_k)] = 0 \quad (14)$$

其中

$$\Delta(\gamma_k) = [H_{k1} \ H_{k2}] \begin{bmatrix} (p - \gamma_k)C + (\gamma_k - p)CA \\ (\gamma_k - p)C + (p - \gamma_k)CA \end{bmatrix} \quad (15)$$

上式可进一步写成

$$\Delta(\gamma_k) = (p - \gamma_k)(H_{k1} - H_{k2})(C - CA) \quad (16)$$

从而得到:

$$\begin{aligned} E_{\gamma_k}[\Delta(\gamma_k)\Delta^T(\gamma_k)] &= \\ &E_{\gamma_k}[(p - \gamma_k)^2(H_{k1} - H_{k2})(C - CA) \times \\ &(C - CA)^T(H_{k1} - H_{k2})^T] \end{aligned} \quad (17)$$

由于  $E_{\gamma_k}[(p - \gamma_k)^2] \neq 0$ , 必定有:

$$H_{k1}(C - CA) = H_{k2}(C - CA) \quad (18)$$

任意的选择  $(H_{k1}, H_{k2})$  使式 (18) 成立, 与在式 (12) 中令  $H_{k1} = H_{k2}$  是等价的, 因此,  $H_{k1} = H_{k2}$  是保证误差无偏和协方差一致有界的必要条件.

假设  $H_k = 2H_{k1} = 2H_{k2}$ , 并将其代入式 (6), 那么估计器 (6) 可以等价成式 (23).  $\square$

将  $H_k = 2H_{k1} = 2H_{k2}$  代入式 (11) 中, 可以得到:

$$\begin{aligned} F_k &= A^2 - [H_k \ H_k] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-p)C + pCA \\ pC + (1-p)CA \end{bmatrix} = \\ &= A^2 - H_k \frac{1}{2} ((1-p)C + pCA) + \\ &= H_k \frac{1}{2} (pC + (1-p)CA) = \\ &= A^2 - \frac{1}{2} H_k (C + CA) \end{aligned} \quad (19)$$

则最优估计的增益  $H_k$  将在下面的定理中得到.

**定理 1.** 对系统 (1) 和 (2) 及形如式 (13) 的估计器, 假设已知估计误差协方差  $\bar{P}_{k-1}$ , 则通过求解

$$\min_{H_k} \bar{P}_{k+1} \quad (20)$$

得到估计器的增益  $H_k$ :

$$H_k = \frac{1}{2} (A^2 \bar{P}_{k-1} (C + CA)^T + A Q_{k-1} C^T) M_k^{-1} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{1}{4} [(C + CA) \bar{P}_{k-1} (C + CA)^T + \\ &= C Q_{k-1} C^T + R_{k-1} + R_k] \end{aligned} \quad (22)$$

从而得到误差协方差  $\bar{P}_{k+1}$  的迭代方程满足

$$\bar{P}_{k+1} = A^2 \bar{P}_{k-1} A^{2T} - H_k M_k H_k^T + A Q_{k-1} A^T + Q_k \quad (23)$$

$$P_0 = E \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \quad (24)$$

**证明.** 由引理 1, 估计误差可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= (A^2 - \frac{1}{2} H_k (C + CA)) \mathbf{e}_{k-1} + A \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_k - \\ &= \frac{1}{2} H_k (\boldsymbol{\omega}_{k-1} + C \mathbf{v}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k) \end{aligned} \quad (25)$$

值得注意的是, 此时的系统噪声  $A \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_k$  和输出噪声  $\boldsymbol{\omega}_{k-1} + C \mathbf{v}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k$  是相关的, 由此得到估计误差协方差

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= E_x E_\gamma [\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^T] = \\ &= (A^2 - \frac{1}{2} H_k (C + CA)) \bar{P}_{k-1} (A^2 - \frac{1}{2} H_k (C + \\ &= CA))^T + A Q_{k-1} A^T - \frac{1}{2} A Q_{k-1} C^T H_k^T - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} H_k C Q_{k-1} A^T + Q_k + \frac{1}{4} H_k C Q_{k-1} C^T H_k^T + \\ &= \frac{1}{4} H_k R_{k-1} H_k^T + \frac{1}{4} H_k R_k H_k^T = \\ &= (H_k + H_k^*) M_k (H_k + H_k^*)^T - H_k M_k H_k^{*T} - \\ &= H_k^* M_k H_k^T - H_k^* M_k H_k^{*T} + A^2 \bar{P}_{k-1} A^{2T} + \\ &= Q_k + A Q_{k-1} A^T - \frac{1}{2} H_k C Q_{k-1} A^T - \\ &= \frac{1}{2} A Q_{k-1} C^T H_k^T - \frac{1}{2} H_k (C + CA) \bar{P}_{k-1} A^{2T} - \\ &= \frac{1}{2} A^2 \bar{P}_{k-1} (C + CA)^T H_k^T \end{aligned} \quad (26)$$

其中,  $M_k = \frac{1}{4} [(C + CA) \bar{P}_{k-1} (C + CA)^T + C Q_{k-1} C^T + R_{k-1} + R_k]$ .

为了最小化  $\bar{P}_{k+1}$ ,  $H_k^*$  应该满足

$$H_k^* = -\frac{1}{2} (A^2 \bar{P}_{k-1} (C + CA)^T + A Q_{k-1} C^T) M_k^{-1}$$

那么,  $H_k = -H_k^*$ , 由此得到估计增益 (21).

将  $H_k, H_k^*$  代回到式 (26), 得到式 (23).  $\square$

**注 1.** 当系统噪声与测量噪声互不相关时, 由经典的 Kalman 滤波理论可知, 误差协方差方程式 (26) 对  $\bar{P}_{k-1}$  是单调的, 并且估计器是最优的<sup>[23]</sup>. 对迭代来说, 单调性是至关重要的, 因为如果在  $k-1$  时刻最小化  $\bar{P}_{k-1}$ , 然后利用最小化的  $\bar{P}_{k-1}$  使  $\bar{P}_{k+1}$  最小化, 那么得到的  $\bar{P}_{k+1}$  是最优的.

下面讨论当噪声相关时的单调性.

由式 (26) 得到:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= \\ &= (A^2 - \frac{1}{2} H_k (C + CA)) \bar{P}_{k-1} (A^2 - \frac{1}{2} H_k (C + CA))^T + \\ &= A Q_{k-1} A^T - \frac{1}{2} A Q_{k-1} C^T H_k^T - \frac{1}{2} H_k C Q_{k-1} A^T + \\ &= \frac{1}{4} H_k C Q_{k-1} C^T H_k^T + Q_k + \frac{1}{4} H_k R_{k-1} H_k^T + \\ &= \frac{1}{4} H_k R_k H_k^T \end{aligned} \quad (27)$$

将式 (27) 从  $\bar{P}_{k-1}$  到  $\bar{P}_{k+1}$  的映射记为  $\mathcal{F}(\cdot) : S_+^n \rightarrow S_+^n$ , 即:

$$\bar{P}_{k+1} = \mathcal{F}(\bar{P}_{k-1}) \quad (28)$$

**引理 2.** 如果  $\bar{P}_{k-1}^{(1)} \geq \bar{P}_{k-1}^{(2)} > 0$ , 可得:

$$\mathcal{F}(\bar{P}_{k-1}^{(1)}) \geq \mathcal{F}(\bar{P}_{k-1}^{(2)}) \quad (29)$$

那么  $\mathcal{F}(\cdot)$  就是一个单调函数.

**证明.** 将式 (27) 从  $\bar{P}_{k-1}$  和  $H_k$  到  $\bar{P}_{k+1}$  的映射记为  $G(\cdot, \cdot) : S_+^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow S_+^n$ , 由于式 (21) 的增益  $H_k$  是由最小化式 (27) 得到的, 所以有:

$$H_k = \arg \min_{\tilde{H}_k} G(\bar{P}_{k-1}, \tilde{H}_k) \quad (30)$$

令  $H_k^{(1)}$  和  $H_k^{(2)}$  分别对应式 (21) 中  $H_k$  的两个取值, 由假设条件  $\bar{P}_{k-1}^{(1)} \geq \bar{P}_{k-1}^{(2)}$  得:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1}^{(2)} &= G(\bar{P}_{k-1}^{(2)}, H_k^{(2)}) \leq \\ &G(\bar{P}_{k-1}^{(2)}, H_k^{(1)}) \leq \\ &G(\bar{P}_{k-1}^{(1)}, H_k^{(1)}) = \bar{P}_{k+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (31)$$

由此, 引理成立. 在上式中, 根据式 (30) 两个等式成立, 第一个不等式也是由 (30) 得到的, 第二个不等式是由式 (27) 得到, 也就是说, 当  $H_k$  给定时,  $G(\bar{P}_{k-1}, \tilde{H}_k)$  是  $\bar{P}_{k-1}$  的线性函数.  $\square$

注 2. 由引理 2, 可知定理 1 是最优的.

### 3 一步滞后的最优估计器设计

由定理 1 可知, 当同时收到测量值的个数为  $r_k = 2$  时, 式 (13) 的估计器基于的测量是  $\mathbf{y}_{k-1}$  和  $\mathbf{y}_k$  的平均值. 于是, 对于所有可能发生的情况, 即情况 1 和情况 2, 得到估计器所收到的测量值的模型描述如下:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \begin{cases} \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{r_k} \mathbf{y}_{k-m_k+i-1}, & r_k = 1 \text{ or } 2 \\ \emptyset, & r_k = 0 \end{cases} \quad (32)$$

定理 2. 考虑系统 (1) 和 (2),  $m_k$  和  $r_k$  分别是  $k$  时刻发生时滞的测量值的个数和收到的数据包个数. 那么, 最优估计器为

1) 当没收到任何数据包时, 即  $r_k = 0$  的情形, 则  $\hat{\mathbf{x}}_{k-m_k}$  仍然是最新的状态估计, 估计器为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = A^{m_{k+1}} \hat{\mathbf{x}}_{k-m_k} \quad (33)$$

同时  $m_{k+1} = m_k + 1$ , 误差协方差迭代方程为

$$\bar{P}_{k+1} = A^{m_{k+1}} \bar{P}_{k-m_k} A^{m_{k+1}T} + \sum_{i=0}^{m_{k+1}-1} A^i Q_{k-m_k+i} A^{iT} \quad (34)$$

2) 当  $r_k > 0$ , 估计器为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1-m_{k+1}} = \bar{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-m_k} + \bar{H}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \quad (35)$$

且

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = A^{m_{k+1}} \hat{\mathbf{x}}_{k+1-m_{k+1}} \quad (36)$$

其中

$$m_{k+1} = m_k - r_k + 1 \quad (37)$$

$$\bar{F}_k = A^{r_k} - \frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_k &= \frac{1}{r_k} (A^{r_k} \bar{P}_{k-m_k} (\sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i)^T + \\ &\sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=0}^{i-1} A^i Q_{k-m_k+r_k-i-1} A^{jT} C^T) M_k^{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{1}{r_k^2} ((\sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i) \bar{P}_{k-m_k} (\sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i)^T + \\ &\sum_{i=0}^{r_k-1} R_{k-m_k+i} + \sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=0}^{i-1} C A^j Q_{k-m_k+i-j-1} A^{jT} C^T) \end{aligned} \quad (40)$$

误差协方差更新方程为

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1-m_{k+1}} &= A^{r_k} \bar{P}_{k-m_k} A^{r_kT} - \bar{H}_k M_k \bar{H}_k^T + \\ &\sum_{i=0}^{r_k-1} A^i Q_{k-m_k+i} A^{iT} \end{aligned} \quad (41)$$

初始误差协方差  $\bar{P}_0 = E \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T$ .

证明. 由式 (1), (2) 和 (32), 可得状态估计误差:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1-m_{k+1}} &= \mathbf{x}_{k+1-m_{k+1}} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1-m_{k+1}} = \\ &A^{r_k} \mathbf{x}_{k-m_k} + \sum_{i=0}^{r_k-1} A^i \mathbf{v}_{k-m_k+r_k-i-1} - \bar{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-m_k} - \\ &\frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i \mathbf{x}_{k-m_k} - \frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=0}^{r_k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-m_k+i} - \\ &\frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=0}^{i-1} C A^j \mathbf{v}_{k-m_k+i-j-1} \end{aligned} \quad (42)$$

利用估计的无偏性, 即得到式 (38).

将式 (42) 代入式 (8) 中, 估计误差协方差可以写成

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1-m_{k+1}} &= E_x [\mathbf{e}_{k+1-m_{k+1}} \mathbf{e}_{k+1-m_{k+1}}^T] = \\ &(A^{r_k} - \frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i) \bar{P}_{k-m_k} (A^{r_k} - \frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=0}^{r_k-1} C A^i)^T + \\ &\sum_{i=0}^{r_k-1} A^i Q_{k-m_k+r_k-i-1} A^{iT} + \frac{1}{r_k^2} \bar{H}_k \sum_{i=0}^{r_k-1} R_{k-m_k+i} \bar{H}_k^T + \\ &\frac{1}{r_k^2} \bar{H}_k \sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=0}^{i-1} C A^j Q_{k-m_k+i-j-1} A^{jT} C^T \bar{H}_k^T - \\ &\frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=0}^{i-1} A^i Q_{k-m_k+r_k-i-1} A^{jT} C^T \bar{H}_k^T - \\ &\frac{1}{r_k} \bar{H}_k \sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=0}^{i-1} C A^j Q_{k-m_k+r_k-i-1} A^{iT} \end{aligned} \quad (43)$$

与定理 1 类似, 通过最小化式 (43), 即可得到式 (39)~(41). 当没有收到测量值时, 仅对估计器进行更新如式 (33) 所示, 并得到协方差方程 (34). 类似于引理 2, 可以得到  $\bar{P}_{k+1-m_{k+1}}$  是单调的, 由此可知, 估计器 (33), (35), (36) 是最优的.  $\square$

#### 4 仿真实例

考虑系统 (1) 和 (2) 具有如下的系统参数矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}, C = [1 \ 2]$$

并设  $R = 0.1$ ,  $Q = 0.25I_2$ ,  $P_0 = 0.25I_2$ , 其中  $I_2$  是二阶单位矩阵.

根据图 1 中的状态转移图, 可以推知  $r_k$ , 假设状态转移概率如下:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P(m(k+1) = 0 | m(k) = 0) = 0.85 \\ p_{01} &= P(m(k+1) = 1 | m(k) = 0) = 0.15 \\ p_{10} &= P(m(k+1) = 0 | m(k) = 1) = 0.75 \\ p_{11} &= P(m(k+1) = 1 | m(k) = 1) = 0.25 \end{aligned}$$

由此, 比较三种方法所得到的误差协方差的迹来说明本文所提算法的有效性, 如图 2 所示. 三种方法分别是:

**方法 1.** 本文所提出的算法;

**方法 2.** 假设无时滞时, 利用标准的 Kalman 滤波;

**方法 3.** 当同时收到两个测量值时, 只利用最新的测量值对估计器进行更新.

从图 2 中可以看出, 本文提出算法的仿真结果明显要优于第三种方法. 同时给出状态曲线与估计曲线, 如图 3 和图 4 所示, 可以看出, 状态估计曲线能够很好地跟踪原状态, 从而进一步说明了该算法的有效性.

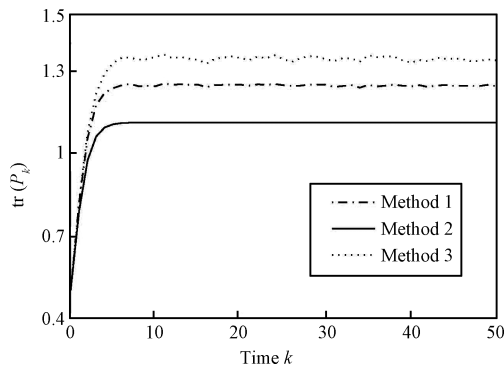


图 2 误差协方差的迹的比较

Fig. 2 Comparison of the trace of error covariance

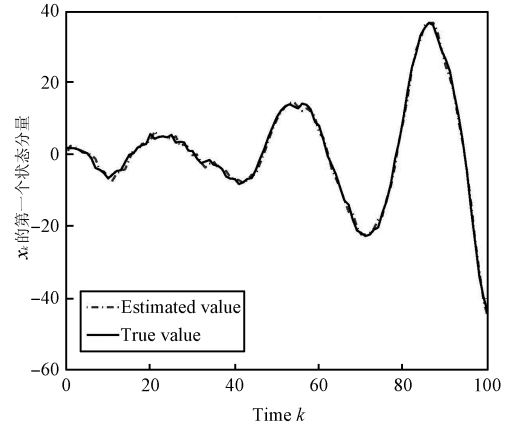


图 3  $x_k$  的第一个状态分量及其估计曲线

Fig. 3 True and estimated values of the first state component of  $x_k$

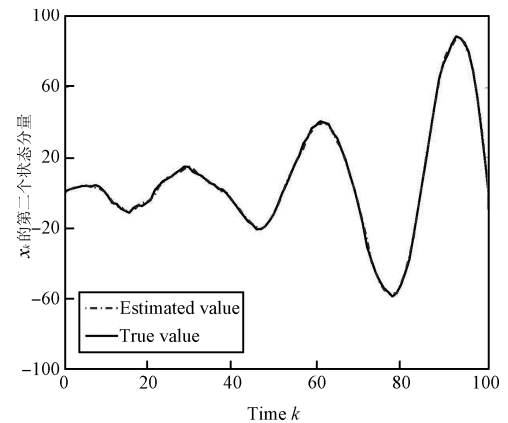


图 4  $x_k$  的第二个状态分量及其估计曲线

Fig. 4 True and estimated values of the second state component of  $x_k$

#### 5 总结

本文针对具有有界随机一步时滞的网络控制系统给出了不带时间戳的最优估计器. 在网络控制系统的估计问题的发展中, 本文主要创新是在每一时刻, 利用所有被收到的测量值的平均值来建立估计测量模型, 并且在无偏性和估计误差协方差一致有界的意义下, 保证设计的状态估计器是最优的.

#### References

- 1 Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 138–162
- 2 Nilsson J, Bernhardsson B, Wittenmark B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. *Automatica*, 1998, **34**(1): 57–64
- 3 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Jordan M I, Sastry S S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1453–1464

- 4 Han C Y, Zhang H S. Linear optimal filtering for discrete-time systems with random jump delays. *Signal Processing*, 2009, **89**(6): 1121–1128
- 5 Cloosterman M B G, Hetel L, van de Wouw N, Heemels W P M H, Daafouz J, Nijmeijer H. Controller synthesis for networked control systems. *Automatica*, 2010, **46**(10): 1584–1594
- 6 Nahi N. Optimal recursive estimation with uncertain observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, **15**(4): 457–462
- 7 Wang Z D, Ho D W C, Liu X H. Robust filtering under randomly varying sensor delay with variance constraints. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2004, **51**(6): 320–326
- 8 Zhang H S, Feng G, Han C Y. Linear estimation for random delay systems. *Systems and Control Letters*, 2011, **60**(7): 450–459
- 9 Chen B, Yu L, Zhang W A. Robust Kalman filtering for uncertain state delay systems with random observation delays and missing measurements. *IET Control Theory and Applications*, 2011, **5**(17): 1945–1954
- 10 Sun S L, Xie L H, Xiao W D, Soh Y C. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1333–1342
- 11 Yaz E, Ray A. Linear unbiased state estimation under randomly varying bounded sensor delay. *Applied Mathematics Letters*, 1998, **11**(4): 27–32
- 12 Matveev A S, Savkin A V. The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(4): 670–676
- 13 Bai J J, Fu M Y, Su H Y. Delay modeling and estimation of a wireless based network control system. In: Proceedings of the 8th Asian Control Conference. Kaohsiung, China: IEEE, 2011. 187–192
- 14 Wang Z D, Yang F W, Ho D W, Liu X H. Robust  $H_\infty$  filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(7): 2579–2587
- 15 Costa O L V, Guerra S. Stationary filter for linear minimum mean square error estimator of discrete-time Markovian jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1351–1356
- 16 Smith S C, Seiler P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(12): 2163–2171
- 17 Schenato L. Optimal estimation in networked control systems subject to random delay and packet drop. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(5): 1311–1317
- 18 Zhang H S, Xie L H. Optimal estimation for systems with time-varying delay. In: Proceedings of the 46th Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2007. 4311–4316
- 19 Moayed M, Foo Y K, Soh Y C. Adaptive Kalman filtering in networked systems with random sensor delays, multiple packet dropouts and missing measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(3): 1577–1588
- 20 Sun S L. Linear minimum variance estimators for systems with bounded random measurement delays and packet dropouts. *Signal Processing*, 2009, **89**(7): 1457–1466
- 21 Sun S L. Optimal linear estimation for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 349–356
- 22 Zhou S S, Feng G.  $H_\infty$  filtering for discrete-time systems with randomly varying sensor delays. *Automatica*, 2008, **44**(7): 1918–1922
- 23 Anderson B D O, Moore J B. *Optimal Filtering*. New Jersey: Prentice-Hall, 1979



**杨园华** 山东大学控制科学与工程学院博士研究生. 分别于2005年和2008年在鲁东大学获得学士和硕士学位. 主要研究方向为状态估计, 时滞系统和网络控制系统.

E-mail: theonlyyang@163.com

(**YANG Yuan-Hua** Ph.D. candidate at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. She received her B.S. degree from Ludong University in 2008. Her research interest covers linear estimation, time delay systems and networked control system.)



**付敏跃** 纽卡斯尔大学电气工程与计算机科学学院教授. 分别于1982年获中国科技大学电气工程学士学位, 1983年、1987年分别获美国威斯康星州麦迪逊大学硕士学位和美国威斯康星州麦迪逊大学博士学位. 主要研究方向为控制系统, 信号处理和通信. 本文通信作者.

E-mail: minyue.fu@newcastle.edu.au

(**FU Min-Yue** Received the B.S. degree in electrical engineering from University of Science and Technology of China in 1982, and the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from the University of Wisconsin-Madison, USA in 1983 and 1987, respectively. His research interest covers control systems, signal processing and communications. Corresponding author of this paper.)



**张焕水** 山东大学控制科学与工程学院教授. 分别于1986年获曲阜师范大学理学学士学位, 1991年获黑龙江大学工学硕士学位, 1997年获东北大学工业自动化工学博士学位. 主要研究方向为线性估计, 鲁棒控制, 无线通信和随机系统.

E-mail: hszhang@sdu.edu.cn

(**ZHANG Huan-Shui** Received his Ph.D. degree in control theory and signal processing from Northeastern University in 1997. He has been with Shandong University since 2006. His research interest covers linear estimation, robust control, wireless communication, and stochastic systems.)