

3. Modelos, señales y sistemas

Panorama

- Modelos en control
 - El por qué de los modelos matemáticos
 - Complejidad de modelos
 - Construcción de modelos
- Linealización y escalamiento
- Tipos de modelos
- Funciones transferencia y diagramas de bloques
 - Estabilidad
 - Álgebra de bloques

Modelos en control

El diseño de un sistema de control típicamente requiere un delicado balance entre limitaciones fundamentales y soluciones de compromiso. Para poder lograr este balance, es necesario tener una comprensión cabal del proceso en cuestión.

Esta comprensión usualmente se captura en un **modelo matemático**. Teniendo un modelo, es posible predecir el impacto de distintos diseños posibles sin comprometer al sistema real.

En este capítulo vamos a discutir brevemente cómo

- elegir el nivel adecuado de complejidad de un modelo;
- linealizar modelos no lineales;
- obtener experimentalmente modelos elementales.

En particular, revisaremos algunas propiedades básicas de las **funciones transferencias** y los **diagramas de bloques**, dos modelos matemáticos muy comúnmente usados en ingeniería de control.

No discutiremos en detalle cómo obtener modelos matemáticos en forma analítica. La derivación de modelos matemáticos es una disciplina compleja en sí misma, elementos de la cual se estudian, por ejemplo, en Procesos y Máquinas Industriales I y II.

El por qué de los modelos matemáticos en control

Recordando el ejemplo de la colada continua, el control del nivel en este proceso sólo tiene tres formas de manipular la válvula: abrirla, cerrarla, o dejarla como está.

Sin embargo, hemos visto también que el modo preciso en que estas acciones se llevan a cabo involucran compromisos delicados entre objetivos de diseño contrapuestos, tales como la velocidad de respuesta y la sensibilidad a ruido de medición.

Para muchos problemas es posible encontrar un controlador adecuado simplemente mediante *prueba y error*. Sin embargo, en muchos casos el enfoque de prueba y error no es factible, debido a complejidad, eficiencia, costo, o aún seguridad.

En particular, es imposible mediante prueba y error responder a cuestiones como las siguientes *antes* de hacer pruebas:

- Dada una planta y un objetivo deseado de operación, ¿qué controlador puede alcanzarlo? ¿Se puede alcanzar el objetivo propuesto con *algún* controlador?
- Dados un controlador y una planta, ¿cómo operarán en lazo cerrado?
- ¿Por qué un lazo dado opera de la forma que lo hace? ¿Puede mejorarse? ¿Con qué controlador?
- ¿Cómo cambiaría la operación si se cambiaran los parámetros del sistema, o si las perturbaciones fueran mayores, o si fallara algún sensor?

Para responder sistemáticamente a estas cuestiones necesitamos modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos nos brindan los medios de capturar el comportamiento de un sistema sujeto a condiciones iniciales, entradas de control y perturbaciones mediante un conjunto de ecuaciones matemáticas.

La importancia de los modelos matemáticos radica en que pueden ser

- simulados en situaciones hipotéticas,
- ensayados en estados que serían peligrosos en el sistema real, y
- usados como base para sintetizar controladores.

Complejidad de modelos

Al construir un modelo es importante tener en cuenta que todo proceso real es complejo, por lo que cualquier intento de construir una descripción *exacta* de la planta es usualmente una meta imposible de alcanzar.

Afortunadamente, la realimentación usualmente nos permite tener éxito aún con modelos muy simples, siempre y cuando éstos capturen las características esenciales del problema.

Es importante destacar que los modelos empleados para control usualmente difieren de los utilizados, por ejemplo, para diseño del proceso.

Los sistemas reales pueden ser arbitrariamente complejos, por lo que todo modelo deberá ser necesariamente una descripción aproximada del proceso. Introducimos tres definiciones para clarificar este enunciado.

Modelo nominal. Es una descripción aproximada de la planta que se usa para el diseño de control.

Modelo de calibración. Es una descripción más exhaustiva de la planta. Incluye características no usadas en el diseño de control pero que tienen directa influencia en el desempeño alcanzado.

Error de modelo. Es la diferencia entre el modelo nominal y el modelo de calibración. Los detalles de este error podrían ser desconocidos, pero podrían disponerse de cotas aproximadas.

Construcción de modelos

Dos enfoques diferenciados para la construcción de modelos:

Experimental. Se basa en pensar al sistema como una *caja negra*. En este enfoque se postula una determinada estructura de modelo, a la que se varían los parámetros, bien vía prueba y error, o bien vía algún algoritmo, hasta que el comportamiento dinámico del modelo se ajusta al observado en la planta mediante ensayos.

Analítico. Se basa en el uso de leyes físicas (conservación de masa, energía y momento). El modelo se obtiene a partir de las leyes fenomenológicas básicas que determinan las relaciones entre todas las señales del sistema.

En la práctica es común combinar ambos enfoques.

Ejemplo. Consideremos un tanque cilíndrico de área A que descarga a través de un orificio en el fondo. Los principios físicos indican que el flujo de descarga q_2 puede modelarse razonablemente como $q_2(t) = K\sqrt{h(t)}$, donde h es el nivel de líquido en el tanque y K una constante a determinar, por ejemplo, usando principios físicos.

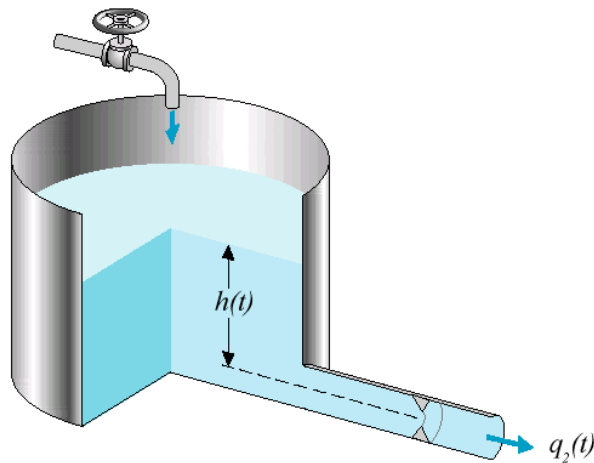


Figura de Dorf & Bishop (2000).

Por ejemplo, se mide $h(t)$ cada T segundos, donde T se elige tal que la variación $|h(t) - h(t - T)|$ sea pequeña. Así, $\hat{q}_2(t) \approx |h(t) - h(t - T)|A/T$, y K podría estimarse haciendo una *regresión lineal* de $\hat{q}_2(t)$ sobre $\sqrt{h(t)}$ para distintos valores de t .

Vemos en este ejemplo como el modelo final combina conocimiento físico con mediciones experimentales.

Los modelos relevantes en control son a menudo bastante simples en comparación al proceso verdadero, y usualmente combinan razonamiento físico con datos experimentales.

Otra consideración de relevancia práctica es la inclusión del actuador en el proceso de modelado. Los actuadores son, en general, bastante alineales, y usualmente tienen su propia dinámica que, a veces, puede hasta dominar otras características del proceso (como suele pasar con válvulas, actuadores hidráulicos, rectificadores controlados)

Así, de aquí en más, cuando nos refiramos al *modelo de la planta*, entenderemos que este modelo también incluye los actuadores, cuando sea necesario.

Linealización

Aunque casi todo sistema real tiene características no lineales, muchos sistemas pueden describirse razonablemente por modelos lineales — al menos dentro de ciertos rangos de operación.

Como normalmente un sistema de control opera en las cercanías de un equilibrio, se hace una linealización *alrededor de este equilibrio*. El resultado es un modelo lineal, mucho más simple, pero adecuado para el diseño de control.

Para un mismo sistema no lineal, la linealización alrededor de distintos puntos de equilibrio dará, en general, distintos modelos linealizados.

Consideramos la linealización del modelo general en **ecuaciones de estado**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}\tag{1}$$

alrededor de un **punto de equilibrio**, o **punto de operación**.

Un **punto de equilibrio** está definido por un triplo de valores **constantes** (x^*, u^*, y^*) que satisfacen (1), es decir que

$$\begin{aligned}0 &= f(x^*, u^*) \\ y^* &= g(x^*, u^*).\end{aligned}$$

Vamos a considerar la linealización del sistema alrededor de un punto de equilibrio (alternativamente, también podría ser alrededor de una *trayectoria*).

Si las funciones f y g son suficientemente regulares, las ecuaciones (1) pueden aproximarse por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\approx f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \Delta u(t), \\ y(t) &\approx g(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \Delta u(t),\end{aligned}\tag{2}$$

donde $\Delta x(t) \doteq x(t) - x^*$ y $\Delta u(t) \doteq u(t) - u^*$.

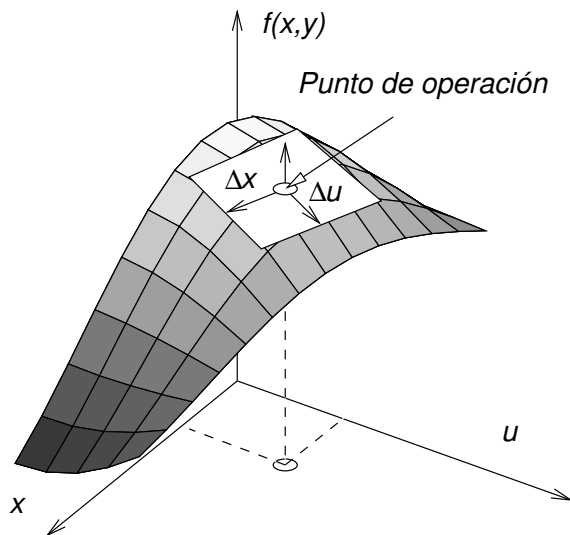
Como $f(x^*, u^*) = 0 = \dot{x}^*$ y $g(x^*, u^*) = y^*$, de (2) obtenemos finalmente el sistema (incremental) linealizado

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y &= C \Delta x + D \Delta u.\end{aligned}\tag{3}$$

Si las variables $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, entonces A, B, C, D son matrices — las **matrices Jacobianas** de f y g evaluadas en el punto de operación, es decir,

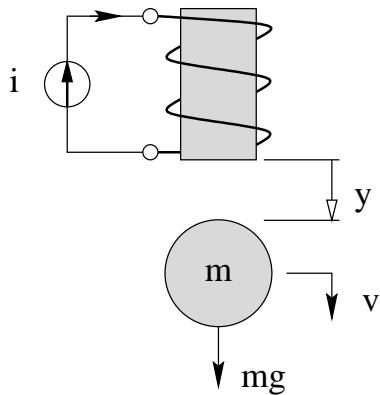
$$A \doteq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \doteq \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$C \doteq \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \doteq \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} \in \mathbb{R}^{p \times m}. \quad (4)$$



Si las variables x , u , e y son escalares (o sea, $\in \mathbb{R}$), entonces A, B, C y D son también escalares y representan las pendientes de las superficies f y g en el punto de operación.

Ejemplo: levitador magnético. La figura muestra el esquema de un sistema de suspensión magnética, en el que una bola de material ferromagnético de masa m se “levita” mediante un electroimán controlado por fuente de corriente.



El movimiento de la bola se puede aproximar por la ecuación diferencial no lineal

$$\ddot{y}(t) - g + \frac{L_0 a}{2m(a + y(t))^2} [i(t)]^2 = 0, \quad (5)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $y(t)$ es la posición de la bola, e $i(t)$ la corriente de excitación del electroimán. Los parámetros L_0 y a son constantes positivas.

Deseamos obtener un modelo incremental linealizado alrededor de un punto de equilibrio definido por la corriente $i(t) = i^*$.

Solución:

Punto de equilibrio. En el punto de equilibrio inducido por la corriente constante $i(t) = i^*$, necesariamente $y(t) = \text{constante}$, es decir, $\dot{y}(t) = 0 = \ddot{y}(t)$. Así, de (5) obtenemos

$$0 = \frac{L_0 a}{2m(a + y^*)^2} [i^*]^2 - g \quad \Rightarrow \quad y^* = \sqrt{\frac{L_0 a}{2mg}} i^* - a.$$

Ecuaciones de estado NL. Definiendo las variables de estado $x_1 \doteq y$, $x_2 \doteq \dot{y}$, y la entrada $u \doteq i$, obtenemos de (5) las ecuaciones de estado en la forma (1),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ g - \frac{L_0 a}{2m(a + x_1(t))^2} [u(t)]^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$y(t) = x_1(t) = g(x_1(t)).$$

Jacobianos y modelo linealizado.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{L_0 a u^2}{m(a+x_1)^3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_0 a u}{m(a+x_1)^2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

Con los valores numéricos $L_0 = 0,01\text{H}$, $a = 0,05\text{m}$, $m = 0,01\text{kg}$, $g = 9,81\text{m/s}^2$, y $i^* = 2\text{A}$, obtenemos $y^* = 0,050963$. Con $x_1 = y^*$ y $u = i^*$ en (4), obtenemos el modelo incremental lineal

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 194,327 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -9,81 \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x. \end{aligned}$$

Escalamiento¹

Un factor importante antes de trabajar con un modelo es hacer una buena selección de los factores de escala (unidades) para las variables y el tiempo.

Un buen escalamiento hará los cálculos más simples y más precisos y disminuirá enormemente los problemas de simulación en computador.

¹Ver §2.6 en Franklin, Powell & Emami-Naeini (1991), *Control de sistemas dinámicos con retroalimentación*. Addison-Wesley Iberoamericana.

Ejemplo. Volvamos al ejemplo anterior para ilustrar el procedimiento en concreto. Las ecuaciones del sistema incremental lineal obtenido pueden escribirse de la forma

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x}_2 &= 194,327\Delta x_1 - 9,81\Delta u.\end{aligned}\tag{7}$$

Para este sistema tan simple las magnitudes de los parámetros no están tan mal, pero aún así es bueno en la práctica tratar de tener constantes entre 0,1 y 100, o entre 0,1 y 10 si es posible, mediante una cuidadosa selección de escala, es decir las unidades en que medir las variables.

Definamos las *variables normalizadas*

$$z_1 = \frac{\Delta x_1}{x_{01}}, \quad z_2 = \frac{\Delta x_2}{x_{02}}, \quad v = \frac{\Delta u}{u_0}, \quad \tau = \omega_0 t.\tag{8}$$

El escalamiento de tiempo cambia la diferenciación:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{d\Delta x}{d(\tau/\omega_0)} = \omega_0 \frac{d\Delta x}{d\tau}.$$

Este escalamiento en $\Delta\dot{x}_1$ y $\Delta\dot{x}_2$ y el uso de (8) en (7) da

$$(\omega_0 x_{01}) \frac{dz_1}{d\tau} = x_{02} z_2$$

$$(\omega_0 x_{02}) \frac{dz_2}{d\tau} = (194,327 x_{01}) z_1 - (9,8 u_0) v,$$

o sea,

$$\frac{dz_1}{d\tau} = \frac{x_{02}}{\omega_0 x_{01}} z_2$$
$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{194,327 x_{01}}{\omega_0 x_{02}} z_1 - \frac{9,8 u_0}{\omega_0 x_{02}} v.$$

Si tomamos la posición en cm, resulta $x_{01} = 0,01$; la velocidad en dm/s da $x_{02} = 0,1$. Así, si elegimos $\omega_0 = 10$, tenemos

$$\frac{dz_1}{d\tau} = z_2$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = 1,94327 z_1 - (9,81 u_0) v.$$

Finalmente, tomando $u_0 = 1/9,81 = 0,102$, llegamos al sistema normalizado

$$\frac{dz_1}{d\tau} = z_2$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = 1,94327 z_1 - v,$$

que es un modelo con parámetros bastante mejor escalados que el original. Mucho mejor para manipulación y simulación digital. Cualitativamente, ambos modelos son equivalentes.

Tipos de modelos

Atributo	Atributo antagónico	Determina si...
SISO	MIMO	... las ecuaciones del modelo tienen una entrada y una salida.
Lineal	No lineal	... las ecuaciones del modelo son lineales en las variables del sistema.
Estacionario	Inestacionario	... los parámetros del modelo son constantes.
Continuo	Discreto	... las ecuaciones del modelo describen su comportamiento en cada instante de tiempo, o sólo en <i>muestras</i> discretas.
Entrada-salida	Espacio de estados	... las ecuaciones dependen sólo de las entradas y las salidas, o también de variables de estado.

Sistemas lineales, estacionarios, en tiempo continuo

Los sistemas que vamos a considerar están descritos por modelos lineales, estacionarios, en tiempo continuo. Éstos pueden siempre representarse por una **ecuación diferencial ordinaria** de la forma

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t). \quad (9)$$

Transformada de Laplace

Para una señal en tiempo continuo $y(t)$ definida para $t \in [0, \infty)$, se define la **transformada de Laplace**

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s\tau} y(\tau) d\tau.$$

Una propiedad muy útil de la transformada de Laplace es la de la transformada de la derivada de una función,

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0^-).$$

Funciones transferencia

Asumiendo condiciones iniciales nulas — $y(0^-) = 0, \dot{y}(0^-) = 0, \dots$) — si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial (9) la convertimos en la **algebraica**

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_0 U(s),$$

que puede expresarse alternativamente como

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad \text{donde} \quad G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \text{y donde}$$

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0, \quad D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0.$$

La función $G(s)$ es la **función transferencia** del sistema. Es un **modelo entrada-salida**.

Algunas definiciones pertinentes a funciones transferencia:

Ceros del sistema: son las raíces de $N(s) = 0$.

Polos del sistema: son las raíces de $D(s) = 0$.

Grado relativo: es la diferencia en grados $n - m$ entre numerador y denominador.

Función transferencia propia: si $m \leq n$.

Función transferencia estrictamente propia: si $m < n$.

Función transferencia bipropia: si $m = n$.

Función transferencia impropia: si $m > n$.

Función transferencia y ecuaciones de estado

Dadas las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{10}$$

si les aplicamos $\mathcal{L}\{\circ\}$ obtenemos las ecuaciones algebraicas

$$sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

de donde $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s)$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0^-).$$

Así, $\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$ es la función transferencia del sistema (10).

Función de transferencia de sistemas con retardo

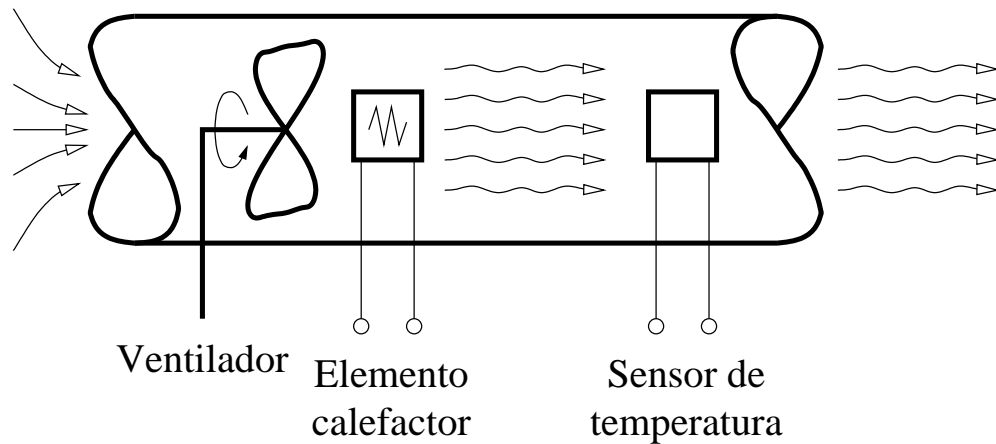
En general, vamos a considerar funciones transferencia racionales y propias, que corresponden a sistemas lineales, estacionarios y de **dimensión finita** (orden finito).

Una excepción de gran importancia en la práctica es el caso de sistemas **con retardo** entre entrada y salida. Estrictamente, estos sistemas tienen **dimensión infinita**. Sin embargo, su representación mediante función transferencia es aún tratable, aunque *deja de ser racional*.

La función transferencia de un retardo de T segundos es de la forma

$$G(s) = e^{-sT} \Leftrightarrow y(t) = u(t - T).$$

Ejemplo: Sistema intercambiador de calor. Un ejemplo simple de un sistema con retardo es el intercambiador de calor de la figura.



La función transferencia entre la entrada (tensión aplicada al elemento calefactor) y la salida (temperatura sensada) es aproximadamente de la forma

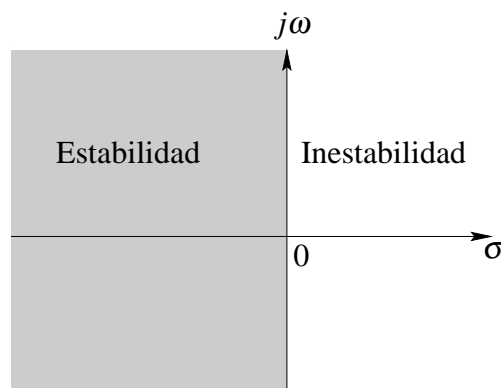
$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{(\tau s + 1)}.$$

Notar que K , T y τ dependen de la velocidad del ventilador, que puede ser variable. Aunque muy simple, este tipo de modelo es muy común en aplicaciones de control de procesos.

Estabilidad de funciones transferencia

Estabilidad entrada-salida.² Decimos que un sistema es *estable entrada-salida*, o *BIBO estable*, si toda entrada acotada produce una salida acotada.

Teorema. [Estabilidad entrada-salida] *Un sistema lineal, estacionario y de tiempo continuo es estable entrada-salida si todos los polos de su función transferencia tienen parte real negativa.*



Región de estabilidad entrada-salida para los polos de $G(s)$.

²También Estabilidad BIBO, del inglés *Bounded-Input Bounded-Output*, (entrada acotada/salida acotada).

Desafío: Asumiendo una función transferencia racional y propia, demostrar el Teorema. Ayuda:

1. Mostrar que si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real negativa, entonces la antitransformada $g(t)$ (respuesta al impulso del sistema) es *absolutamente integrable*, es decir,

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau < M; \quad \text{para alguna } M > 0.$$

2. Mostrar que si $g(t)$ es absolutamente integrable, entonces para toda entrada acotada $u(t)$ la salida

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} \\ &= \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

es acotada — o sea, el sistema es estable entrada-salida.

Diagramas de bloques

Capturan la esencia del sistema en un formalismo gráfico abstracto de simple manipulación. Representan el flujo y procesamiento de las señales dentro del sistema.

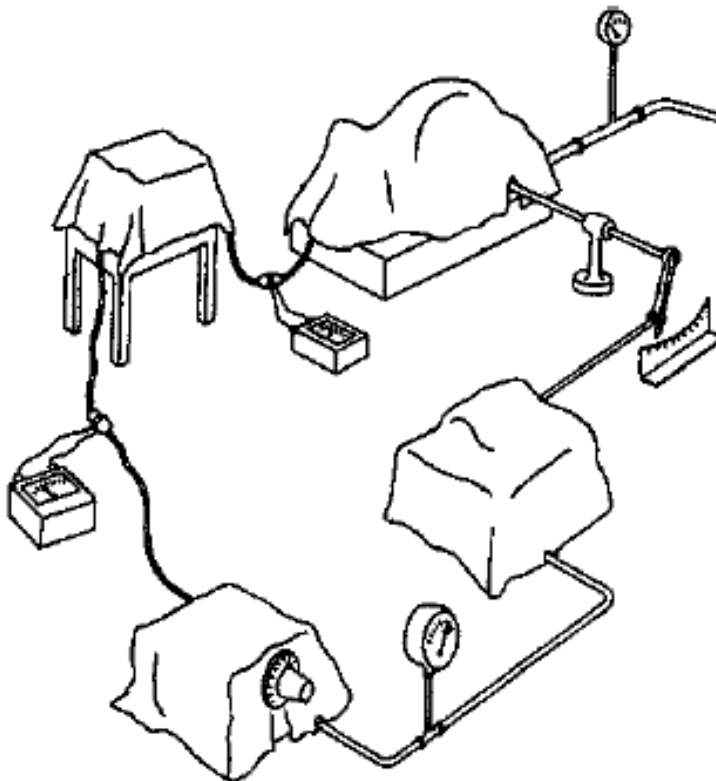
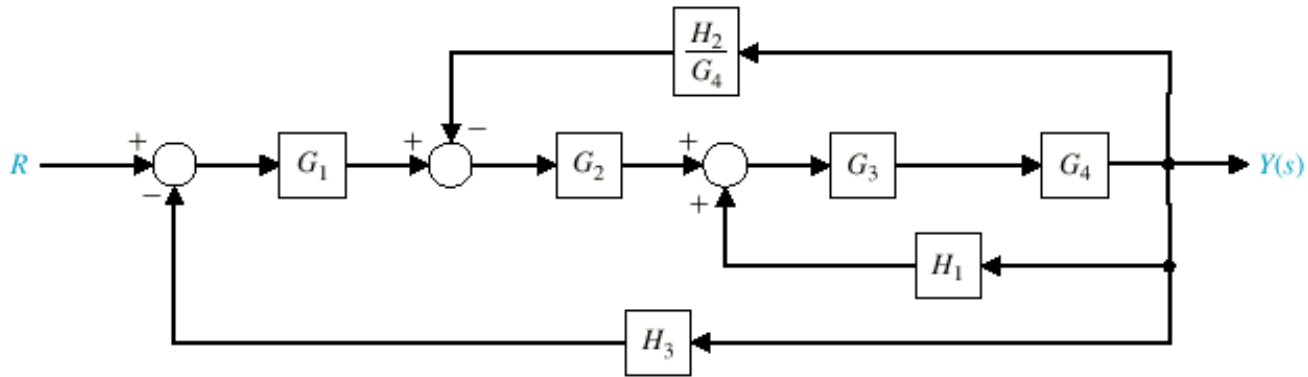


Figura del curso ME155A, Prof. Åström, UCSB 2001.

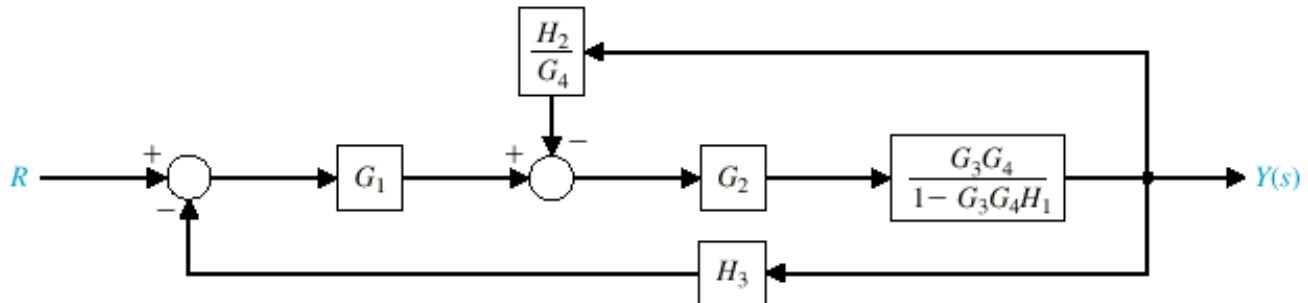
Los diagramas de bloques permiten ver la similaridad esencial entre distintos tipos de sistemas (independizan del dominio físico).

Otro formalismo gráfico con esta propiedad son los diagramas de enlaces (*bond graphs*).

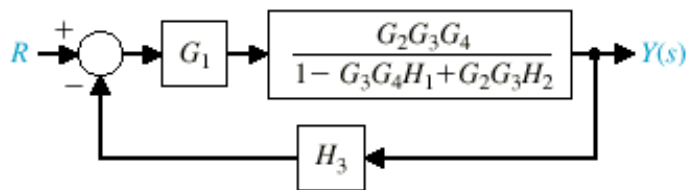
Álgebra de bloques



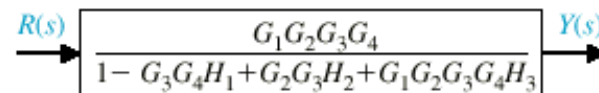
(a)



(b)



(c)



(d)

Resumen

- Para poder diseñar en forma sistemática un controlador para un sistema es necesario disponer de una descripción formal — aunque posiblemente simple — del mismo. Esta descripción es el modelo matemático del sistema.
- Los modelos matemáticos pueden obtenerse en forma experimental o analítica, y en general, en la práctica, mediante una combinación de ambos métodos.
- En general, los modelos matemáticos involucran un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. En muchos casos, estas ecuaciones pueden linearizarse alrededor de un punto de operación, con lo que se obtiene un modelo incremental lineal mucho más tratable.

- La elección de unidades adecuadas (escalamiento) de las variables y el tiempo permite mejorar los modelos desde el punto de vista computacional.
- Las funciones transferencia describen las propiedades entrada-salida de los sistemas en forma algebraica en el dominio Laplace.
- Una función transferencia es estable entrada-salida (entrada acotada/salida acotada) si todos sus polos tienen parte real negativa.