7. Limitaciones fundamentales en control SISO

Parte 3

Panorama:

- Limitaciones de desempeño en la respuesta temporal debidas a ceros y polos en el SPDC.
- Restricciones en S y T
- Especificaciones en la respuesta al escalón
- Restricciones en la respuesta al escalón
- Ejemplo

Limitaciones estructurales: polos y ceros en $\mathbb{C}^+$

Estudiamos ahora en más detalle las limitaciones en diseño inducidas por polos inestables y ceros de fase no mínima de la planta a lazo abierto. Consideremos nuevamente el lazo de realimentación unitaria de la Figura 1,

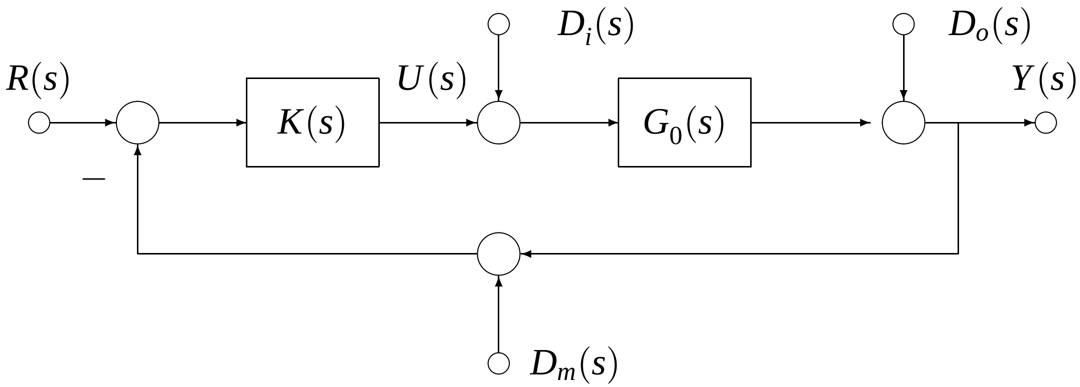


Figura 1: Lazo de control de un grado de libertad.

y las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

$$S_0(s) = \frac{1}{1+G_0(s)K(s)}, \quad T_0(s) = \frac{G_0(s)K(s)}{1+G_0(s)K(s)}.$$

Restricciones de Interpolación en S_0 y T_0

Lema. [Restricciones de Interpolación] *Sea* $H(s) \triangleq G_0(s)K(s)$ *en el lazo de la Figura 1. Sea* $K(s)$ *tal que el lazo cerrado sea internamente estable. Entonces,*

1. *si* p *es un polo inestable de* $H(s)$ *(*$\mathrm{real}\, p \geq 0$*)*

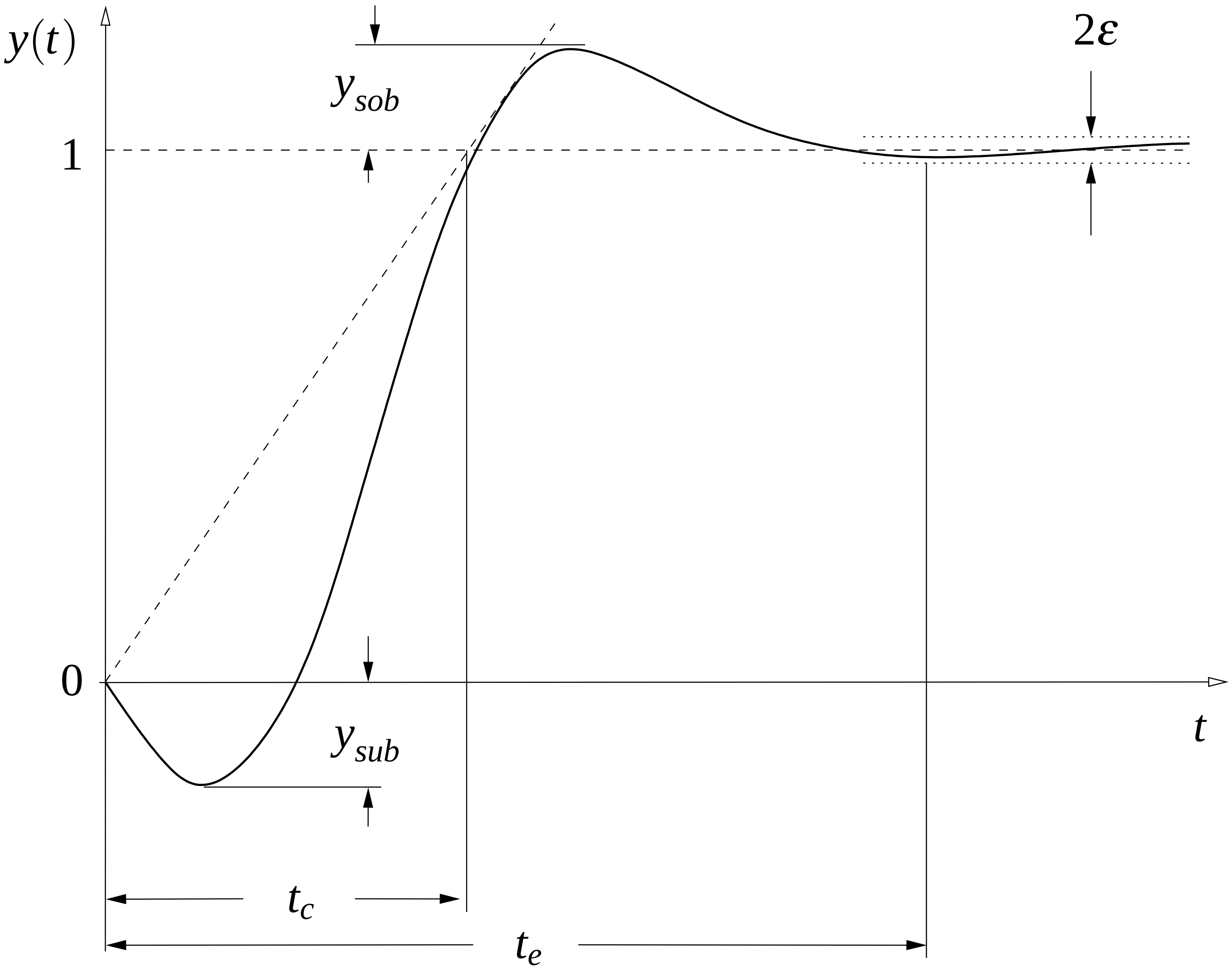
$$S(p) = 0 \qquad y \qquad T(p) = 1.$$

2. *si* q *es un cero de fase no mínima de* $H(s)$ *(*$\mathrm{real}\, q \geq 0$*)*

$$S(q) = 1 \qquad y \qquad T(q) = 0.$$

Sea cual fuera $K(s)$, las funciones $S_0(s)$ y $T_0(s)$ deberán satisfacer estas restricciones en los polos y ceros de parte real no negativa del lazo abierto.

Especificaciones de la respuesta temporal



La especificación de la respuesta temporal es más directa que especificar magnitudes de $S_0(j\omega)$ o $T_0(j\omega)$, pero entonces es más difícil traducir estas especificaciones a condiciones en $S_0(s)$ o $T_0(s)$, que son las que se diseñan en última instancia.

Los parámetros típicos para la respuesta al escalón son

- sobrevalor y_{sob}
- subvalor y_{sub}
- tiempo de crecimiento t_c
- tiempo de establecimiento t_e

Con referencia al sistema de la Figura 1, definimos el *error de seguimiento* $e(t) = r(t) - y(t)$.

sobrevalor: es el máximo valor en que la respuesta del sistema excede su valor de régimen permanente,

$$y_{sob} \triangleq \max_t \{-e(t)\}.$$

subvalor: es máximo pico negativo de la salida del sistema,

$$y_{sub} \triangleq \max_{t}\{-y(t)\}.$$

tiempo de crecimiento: cuantifica aproximadamente el tiempo mínimo que toma la salida en alcanzar el nuevo punto de operación,

$$t_c \triangleq \max_{\delta}\{\delta : y(t) \leq t/\delta \quad \text{para todo } t \text{ en el intervalo } [0,\delta]\}$$

tiempo de establecimiento: cuantifica el tiempo que tardan los transitorios en decaer permanentemente por debajo de un determinado nivel ε, usualmente entre el 1 y 10 % del valor de régimen permanente,

$$t_e \triangleq \min_{\delta}\{\delta : |e(t)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \text{ en el intervalo } [\delta,\infty)\}$$

Restricciones en la Respuesta al Escalón

Como vimos, los polos y ceros en el semiplano derecho del plano complejo imponen restricciones algebraicas en las funciones de sensibilidad del sistema, no importa cual sea el controlador usado.

Estas restricciones algebraicas se traducen en restricciones en el desempeño alcanzable de la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado.

Teorema. [Condición integral sobre el error al escalón] *Supongamos que el sistema a lazo abierto $H(s)$ tiene un polo en p, con $\operatorname{real} p > 0$. Entonces si el lazo cerrado es estable*

$$\int_0^\infty e^{-pt} e(t) dt = 0$$

$\square$

Un resultado dual existe para plantas con ceros de fase no mínima.

Teorema. [Condición integral sobre la respuesta al escalón] *Supongamos que el sistema a lazo abierto $H(s)$ tiene un cero en q, con $\operatorname{real} q > 0$. Entonces si el lazo cerrado es estable*

$$\int_0^\infty e^{-qt} y(t)\,dt = 0.$$

$\square$

Estos teoremas muestran que si la planta tiene ceros o polos en el semiplano derecho del plano complejo, entonces el error y la salida a una entrada escalón deben satisfacer relaciones integrales *independientemente* del controlador usado para estabilizar el sistema.

Interpretaciones: Compromisos de diseño

Corolario 1. [Polos inestables reales y sobrevalor] *Si la planta tiene un polo inestable real en* $p > 0$*, su respuesta al escalón tiene forzosamente sobrevalor. Más aún, si* t_c *es el tiempo de crecimiento del sistema a lazo cerrado, entonces*

(1)
$$\begin{aligned} y_{sob} &\geq \frac{(pt_c - 1)e^{pt_c} + 1}{pt_c} \\ &\geq \frac{pt_c}{2}. \end{aligned}$$

Por el Corolario 1, si la planta tiene un polo inestable,

1. necesariamente hay sobrevalor en la respuesta al escalón,
2. el sobrevalor será mayor cuanto mayor sea el tiempo de respuesta del lazo cerrado.

Los polos inestables demandan acción de control rápida para un mejor desempeño (menor sobrevalor). A mayor magnitud de los polos inestables, mayor será esta demanda.

Ejemplo. *Supongamos que nuestra planta a lazo abierto tiene un polo en $p = 2$. Entonces la cota en sobrevalor en la respuesta al escalón del lazo cerrado (estable) es*

$$y_{sob} \geq t_c.$$

Si diseñamos el controlador para obtener un tiempo de crecimiento $t_r = 1s$, el sobrevalor será mayor al 100 %! Para una respuesta razonable deberíamos elegir al menos $t_c \leq 0{,}2s$. $\square$

Corolario. [Ceros de fase no mínima y subvalor] *Si la planta tiene un cero de fase no mínima real en $q > 0$, su respuesta al escalón tiene forzosamente subvalor. Más aún, si t_e es el tiempo de establecimiento a un nivel ε del sistema a lazo cerrado, entonces*

$$y_{sub} \geq \frac{1-\varepsilon}{e^{qt_e}-1}.$$

La interpretación del Corolario es que si la planta tiene un cero real de fase no mínima,

- necesariamente hay subvalor en la respuesta al escalón,
- el pico del subvalor será mayor cuanto menor sea el tiempo de establecimiento del lazo cerrado.

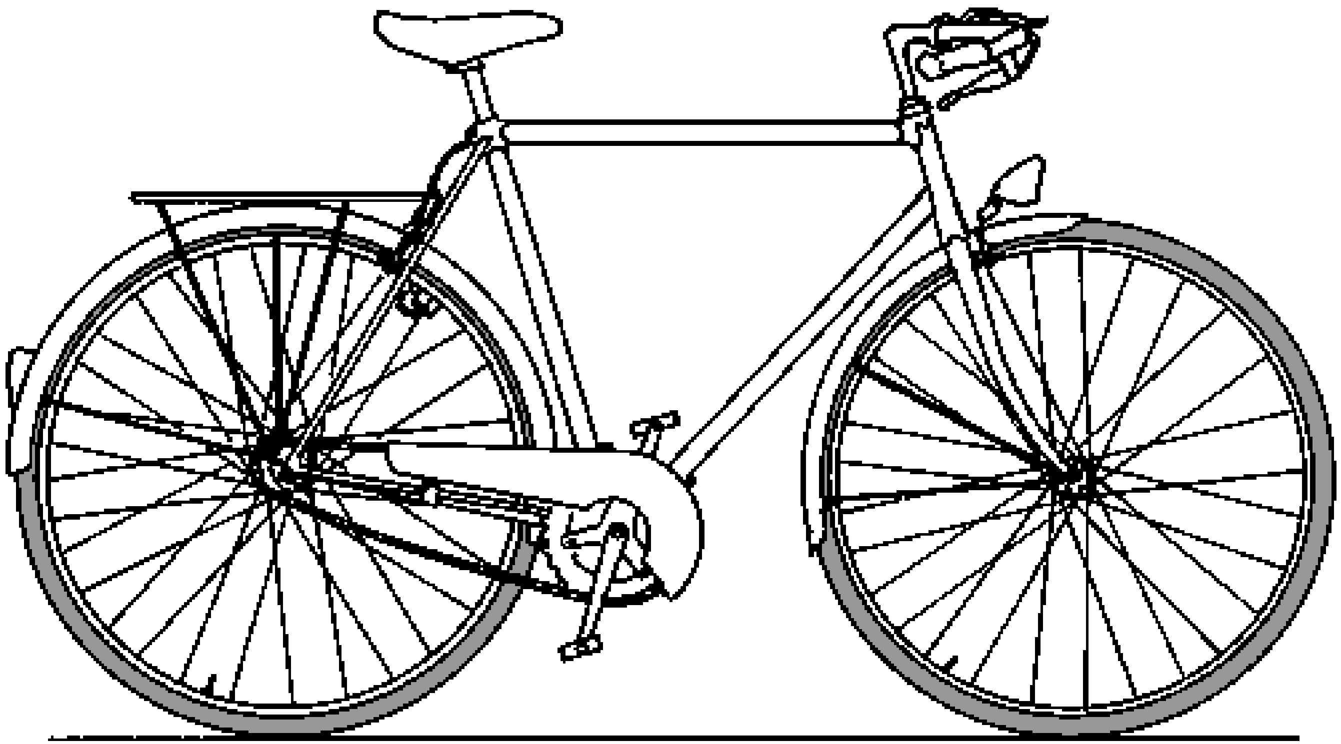
Los ceros de fase no mínima demandarán acción de control lenta para un mejor desempeño (menor subvalor). Cuanto menores (más lentos) sean los ceros de fase no mínima, mayor será esta demanda.

En resumen, para el diseño de los polos a lazo cerrado,

1. El polo dominante a lazo cerrado debe ser mayor (en magnitud) que cualquier polo inestable a lazo abierto del sistema.

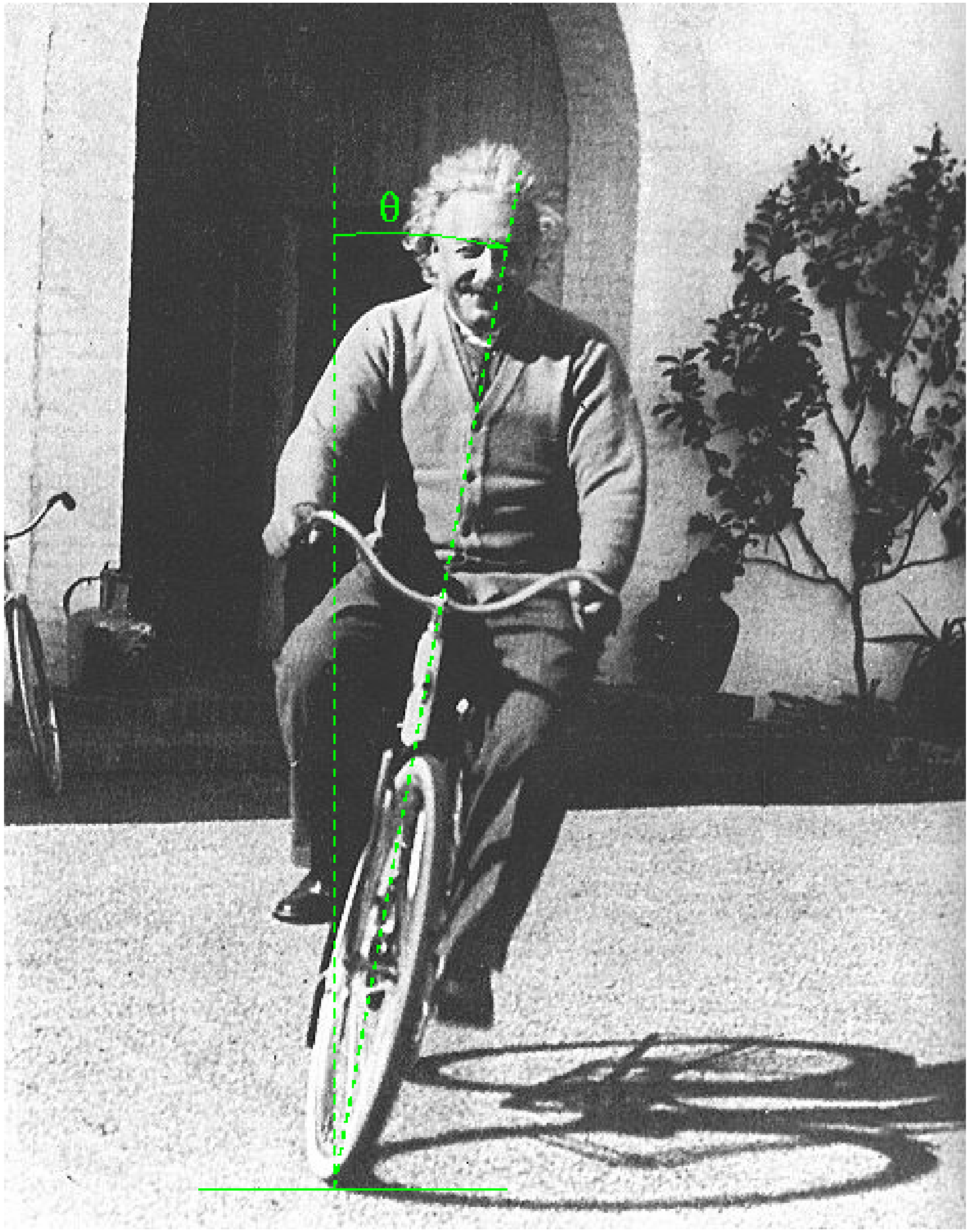
2. El polo dominante a lazo cerrado debe ser menor (en magnitud) que el menor cero de fase no mínima del sistema.

Ejemplo de control de un sistema inestable[1]

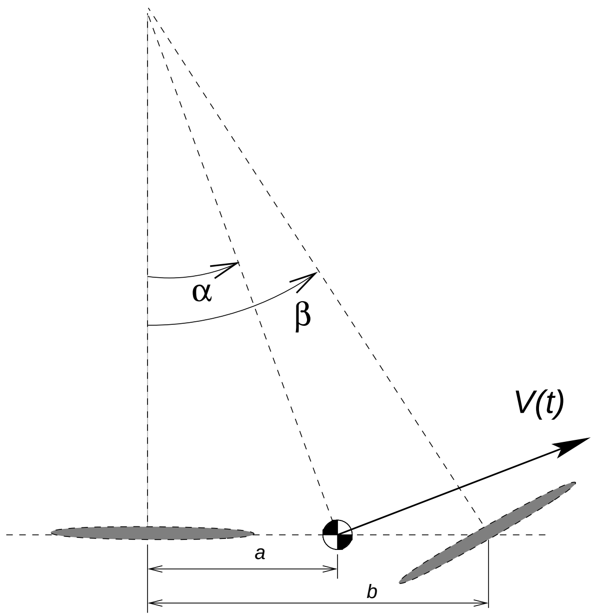


La conducción de una bicicleta involucra un problema de control no trivial.

[1] Recogido por Karl Åström en su seminario *Using Bicycles to Illustrate Limitations in Control System Design* en la Universidad de Illinois Urbana-Champagne, Febrero 2001.


θ

Ecuación del ángulo de inclinación θ

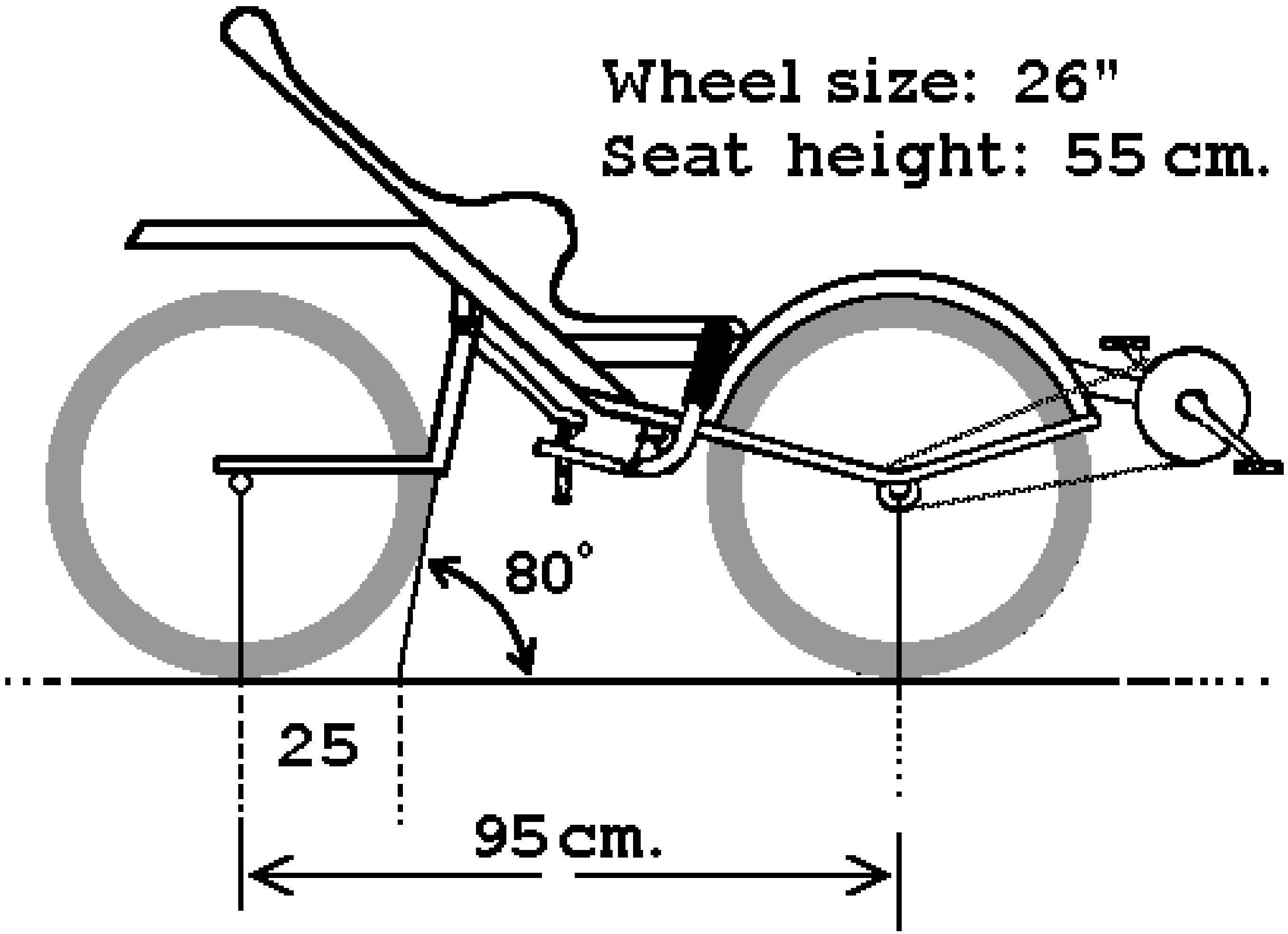


La linealización da la transferencia

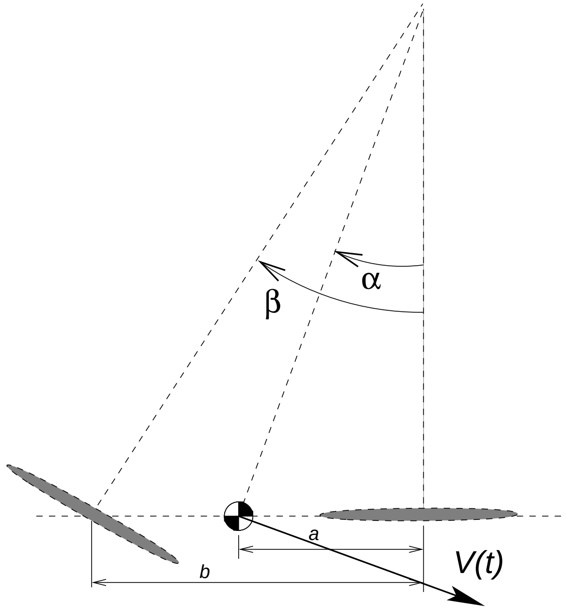
$$\Theta(s) = \frac{am\ell V_0}{bJ} \frac{\left(s + \frac{V_0}{a}\right)}{\left(s^2 - \frac{mg\ell}{J}\right)} \beta(s)$$

que tiene un polo inestable.

La bicicleta con dirección trasera



Ecuación del ángulo de inclinación θ en la bicicleta con dirección trasera



La linealización da la transferencia

$$\Theta(s) = \frac{am\ell V_0}{bJ}\frac{\left(-s+\frac{V_0}{a}\right)}{\left(s^2-\frac{mg\ell}{J}\right)}\beta(s)$$

que tiene un polo inestable **y un cero de fase no mínima**.

Conclusiones

La bicicleta con tracción trasera es **inherentemente** mucho más difícil para andar! ¿Por qué? Es un sistema con restricciones muy serias para el controlador: un polo inestable y un cero de fase no mínima.

Ver la página `http://wannee.nl/hpv/abt/e-index.htm` sobre bicicletas con dirección trasera, y la dificultad de construir una estable. . .