9. Manejo de restricciones

Panorama de la clase:

- Introducción
- Efecto **wind-up**
- Compensación **anti-wind-up**

Introducción

Un problema inevitable en la mayoría de los problemas de control prácticos es la existencia de limitaciones en los actuadores. Como viéramos en el Capítulo 7, estas limitaciones pueden ser en

- máximos o mínimos rangos de **actuación**, o
- máximos rangos de **velocidad de actuación**.

Si estas limitaciones se ignoran en la etapa de diseño, el desempeño real del sistema de control puede sufrir una severa degradación respecto al esperado si la señal de control alcanza sus límites.

Hay dos formas de encarar este problema:

(I) reducir los requerimientos en el desempeño deseado, de modo que el controlador lineal nunca supere sus límites, o

(II) modificar el diseño para tener en cuenta las limitaciones de actuación.

En este capítulo daremos un método que sigue el enfoque (II). Este método funcionará aceptablemente si la señal de control requerida no excede en más de un 100 % los límites admisibles (saturación moderada).

De otro modo, posiblemente se necesite cambiar el actuador en cuestión por uno de mayor prestación.

Wind-up

Uno de los principales efectos indeseables de la saturación en la actuación es que cualquier integrador del controlador (suponiendo hay alguno, como sucede con controladores de la familia PID) continuará integrando aún mientras la entrada se encuentra saturada.

Así, el estado del integrador en cuestión puede alcanzar valores excesivos, que deteriorarán la respuesta transitoria del sistema, generalmente produciendo grandes sobrevalores.

Este efecto se denomina ***integrator wind-up*** («enrolle» o «embale» del integrador). Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo 1. [*Wind-up* de integración] *Sea el modelo de una planta*

$$G_0(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

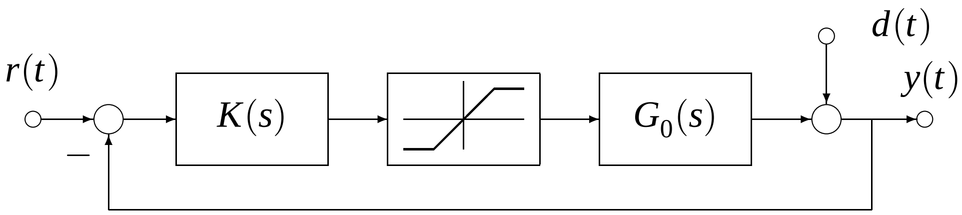
para la cual se diseñó el controlador PID

$$K(s) = \frac{50(s+1)(s+2)}{s(s+13)},$$

para lograr una sensibilidad complementaria deseada

$$T_0(s) = \frac{100}{s^2+13s+100}.$$

La entrada de la planta satura cuando se encuentra fuera del rango $[-3,3]$*.*



Planta con saturación a la entrada

Supongamos que se aplica al sistema a lazo cerrado una señal de referencia escalón unitario $r(t) = 1$ en $t = 1$, y un escalón de perturbación de salida negativo $d(t) = -1$ en $t = 10$.

La Figura 1 muestra que la planta presenta una respuesta transitoria indeseable cuando existen limitaciones en la actuación inconsistentes con el ancho de banda demandado.

Comparando con la respuesta del sistema sin limitaciones, vemos que el deterioro se debe a los límites a la entrada de la planta. El escalón en la referencia produce una demanda instantánea de 50 en la salida del controlador, pero la planta sólo admite 3, por lo que ocurre saturación. El diseño lineal de $K(s)$ no tiene en cuenta este fenómeno.

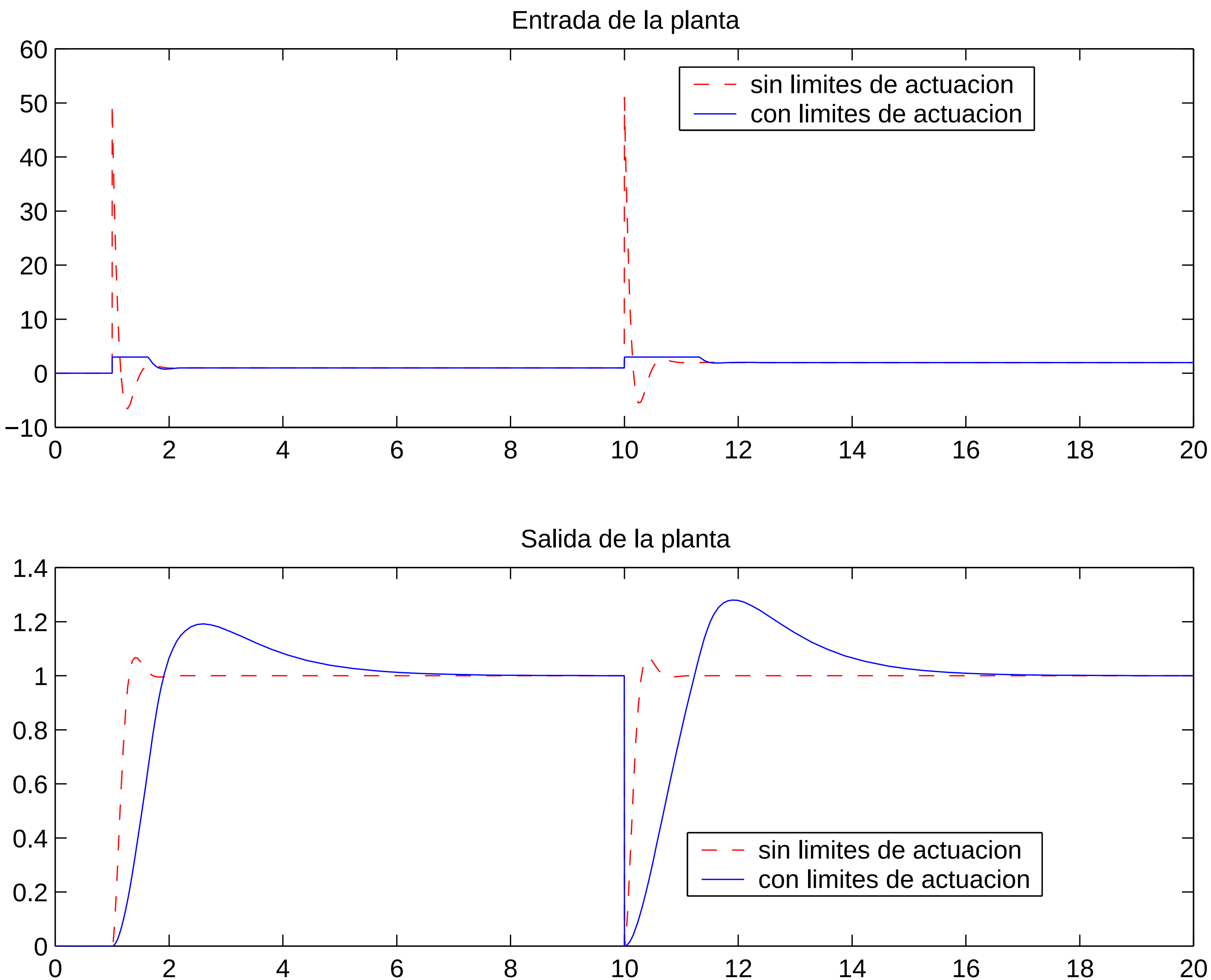


Figura 1: Respuesta con y sin limitaciones de actuación

Compensación anti-wind-up

Hay muchas alternativas para evitar el windup de los integradores. Todas ellas se basan en tratar que los estados del controlador tengan las siguientes propiedades claves:

(I) deben estar conducidos por la *verdadera* entrada (es decir, la limitada) del sistema;

(II) deben tener una respuesta acotada cuando la entrada de la planta satura en los límites de actuación.

Es particularmente fácil lograr estas propiedades si el controlador es bipropio y de fase mínima. Para ver cómo, escribimos la función transferencia del controlador $K(s)$ en la forma

$$K(s) = K_\infty + \bar{K}(s),$$

donde $K_\infty = \lim_{s\to\infty} K(s)$, y $\bar{K}(s)$ es estrictamente propia. Consideremos ahora el lazo en realimentación de la Figura 2.

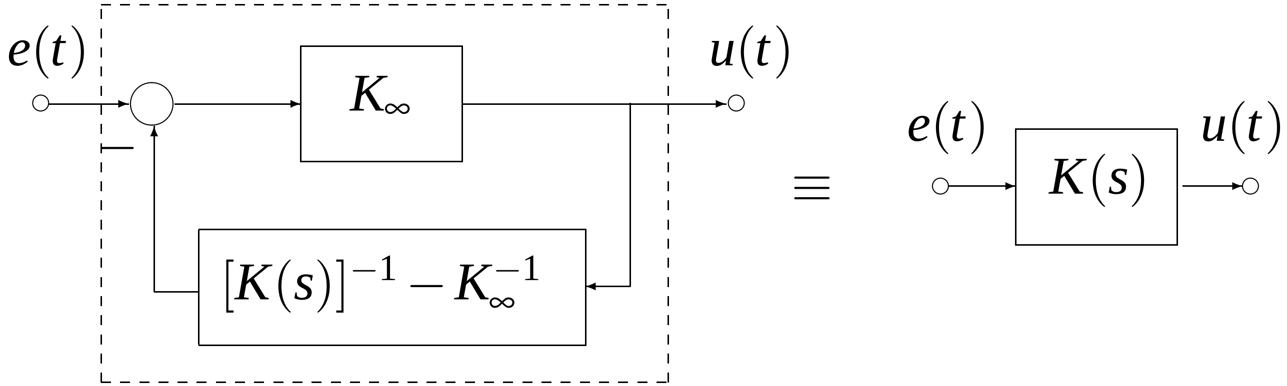


Figura 2: Implementación en realimentación de $K(s)$ bipropia

La función transferencia desde $e(t)$ a $u(t)$ es $K(s)$

$$\begin{aligned}\frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{K_\infty}{1 + ([K(s)]^{-1} - K_\infty)K_\infty} \\ &= \frac{K_\infty}{[K(s)]^{-1}K_\infty} = K(s).\end{aligned}$$

Dado que $[K(s)]^{-1}$ es estable si $K(s)$ es de fase mínima, el bloque $[K(s)]^{-1} - K_\infty^{-1}$ en el lazo de realimentación de la Figura 2 resulta estable. Además, notemos que este bloque contiene *toda la dinámica* del controlador.

Para que se cumplan con las propiedades claves (I) y (II) que compensan el efecto **wind-up**, todo lo que hay que hacer es asegurarse que la entrada $u(t)$ que *realmente* recibe la planta sea la misma que entra al bloque $[K(s)]^{-1} - K_\infty^{-1}$ en el lazo de realimentación de la Figura 2.

Vamos a considerar dos casos de limitación en actuación (ambas dan origen al efecto de wind-up de integradores):

- limitación en amplitud, o **saturación**, y
- limitación en velocidad, o **slew-rate**.

Esquema anti-wind-up para saturación

La compensación de wind-up por saturación se logra simplemente incluyendo un **limitador saturación**, correspondiente a la limitación real del actuador, en el lazo directo del diagrama de la Figura 2, como se ve en la Figura 3.

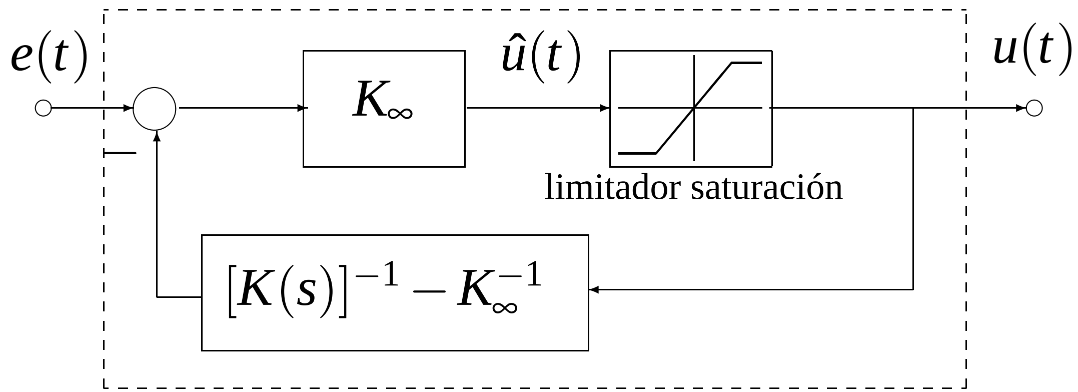


Figura 3: Controlador compensado para saturación

De este modo, si la señal de control $\hat{u}(t)$ satura el actuador, los estados del controlador «se enteran», ya que están conducidos por la entrada efectiva a la planta $u(t)$.

Si la señal de control $\hat{u}(t)$ no satura, el diagrama de bloques de la Figura 3 es equivalente a $K(s)$.

El limitador saturación se define por

$$u(t) = \mathrm{sat}(\hat{u}(t)) = \begin{cases} u_{\text{máx}} & \text{si } \hat{u}(t) > u_{\text{máx}}, \\ \hat{u}(t) & \text{si } u_{\text{mín}} \leq \hat{u}(t) \leq u_{\text{máx}}, \\ u_{\text{máx}} & \text{si } \hat{u}(t) < u_{\text{mín}}. \end{cases}$$

Con SIMULINK podemos usar el bloque `saturation` en la librería *Nonlinear* para implementar la compensación de la Figura 3. Sus parámetros son los límites máximo y mínimo de amplitud.

Ejemplo 2. *Volvemos al sistema de control del Ejemplo 1. Sin embargo, esta vez implementamos el controlador en la* *forma de la Figura 3, que en este caso resulta*

$$K_\infty = 50, \qquad [K(s)]^{-1} - K_\infty^{-1} = \frac{(10s-2)}{50(s+1)(s+2)}$$

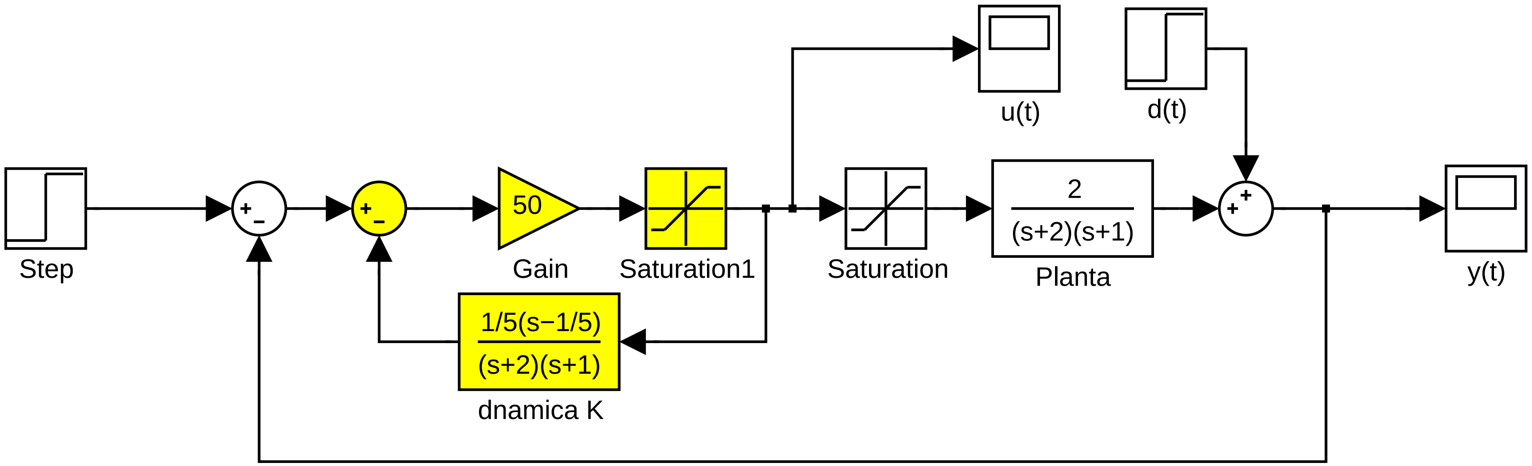


Figura 4: Diagrama Simulink del Ejemplo 2

Simulamos el sistema con y sin compensación anti-wind-up usando el diagrama SIMULINK *de la Figura 4, obtenemos la respuesta de la Figura 5, notablemente mejorada respecto del* *caso no compensado.*

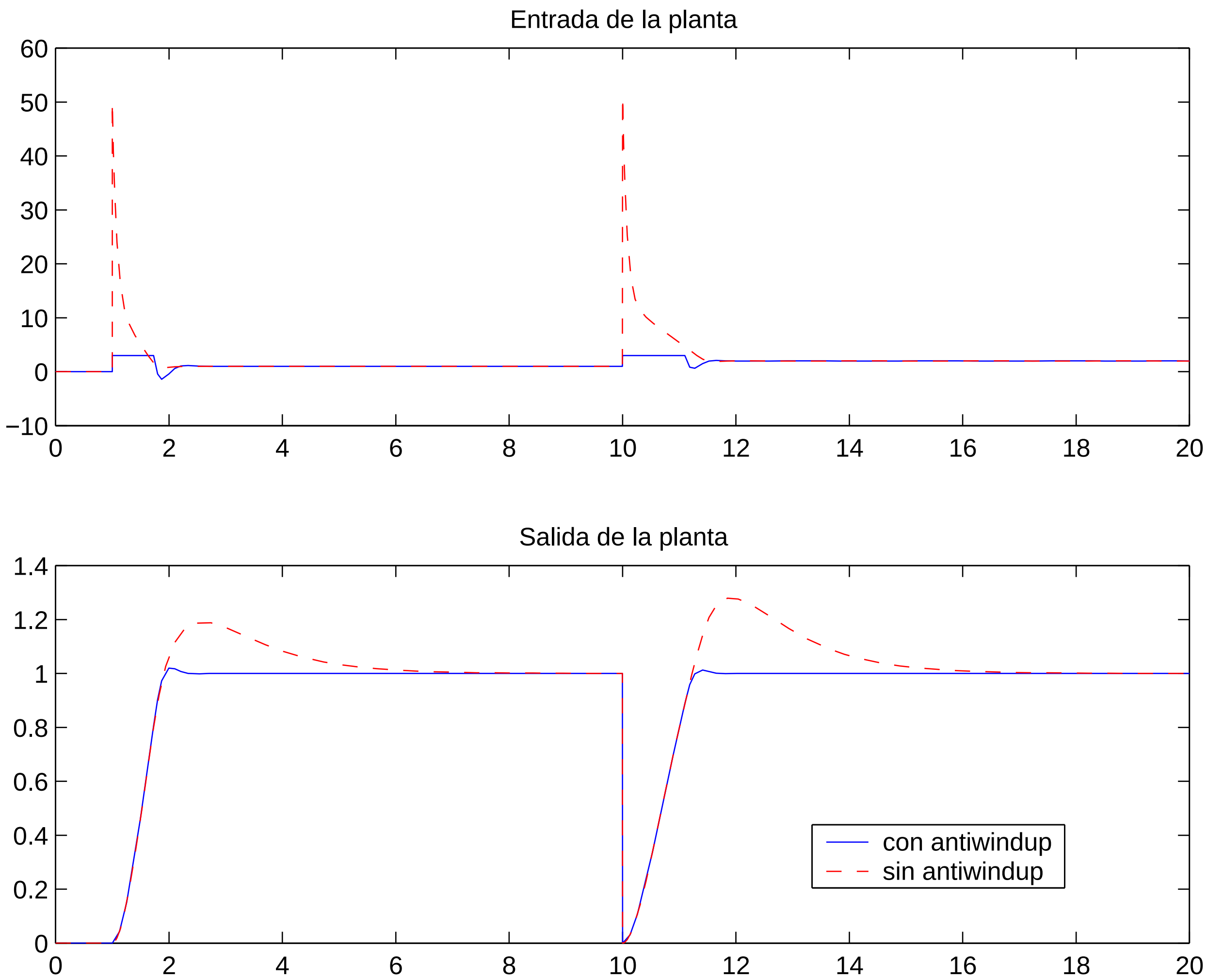


Figura 5: Respuesta del sistema del Ejemplo 2 con y sin AW

Esquema anti-wind-up para slew-rate

El **slew-rate** es una limitación en la máxima velocidad $\dot{u}(t)$ que el actuador puede seguir. Es, en definitiva, una saturación en velocidad.

En forma similar al caso de saturación, para compensar slew-rate, simplemente debemos incluir un **limitador slew-rate**, correspondiente a la limitación real del actuador, en el lazo directo del diagrama de la Figura 2, como se ve en la Figura 6.

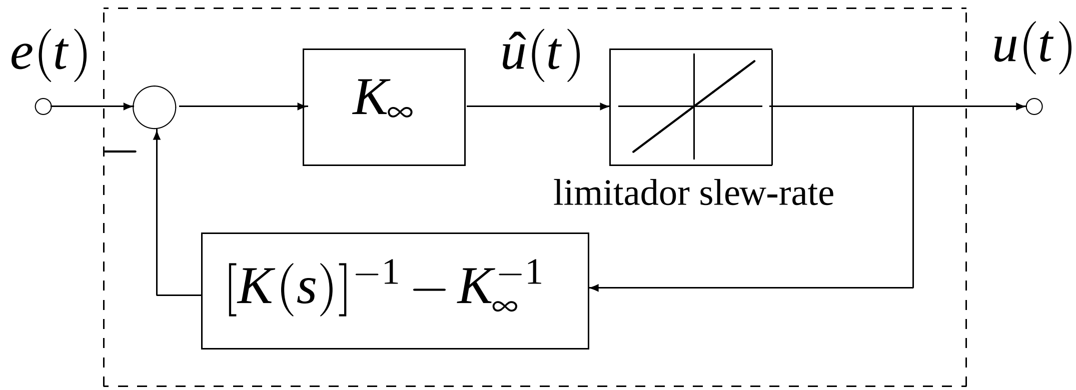


Figura 6: Controlador compensado para slew-rate

El limitador slew-rate se define por

$$\dot{u}(t) = \mathrm{sat}(\dot{\hat{u}}(t)) = \begin{cases} \sigma_{\text{máx}} & \text{si } \dot{\hat{u}}(t) > \sigma_{\text{máx}}, \\ \dot{\hat{u}}(t) & \text{si } \sigma_{\text{mín}} \leq \dot{\hat{u}}(t) \leq \sigma_{\text{máx}}, \\ \sigma_{\text{máx}} & \text{si } \dot{\hat{u}}(t) < \sigma_{\text{mín}}. \end{cases}$$

Con SIMULINK podemos usar el bloque `rate-limiter` en la librería *Nonlinear* para implementar la compensación de la Figura 6. Sus parámetros son los límites $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$.

Fuera de SIMULINK, el limitador slew-rate es más difícil de implementar que el limitador saturación, pero puede aproximarse usando la aproximación de Euler de la derivada,

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t) + u(t-\Delta)}{\Delta},$$

con un bloque como el ilustrado en la Figura 7. La Figura 8 muestra un bloque con limitador saturación y slew-rate combinados.

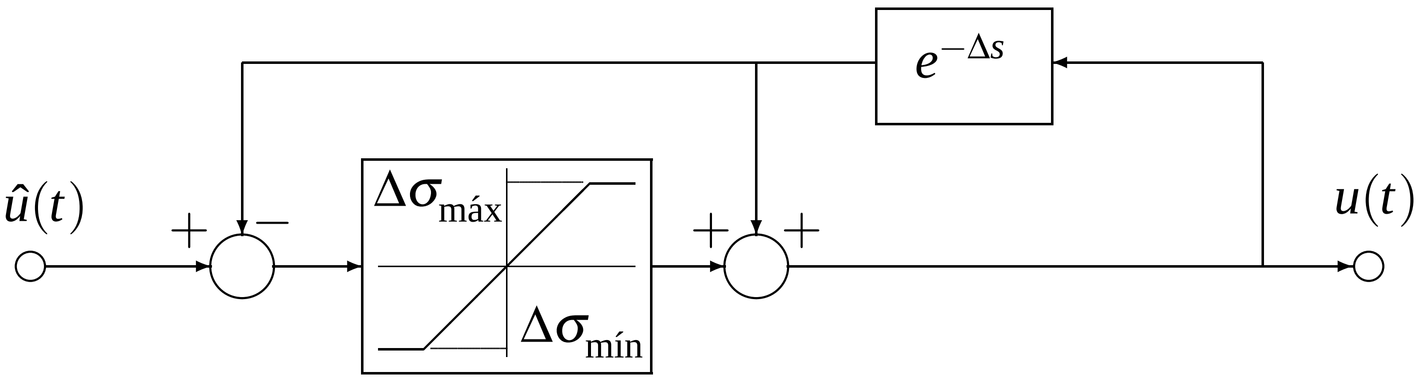


Figura 7: Modelo de limitador *slew rate*

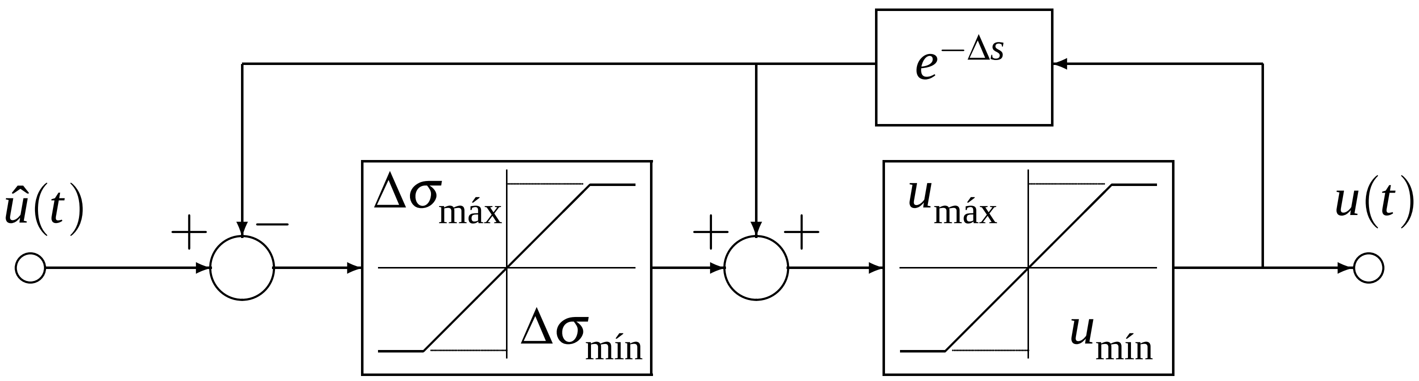


Figura 8: Modelo de limitador combinado saturación-*slew rate*

Conclusiones

En este breve Capítulo consideramos el problema de compensación de limitaciones de actuación:

- limitación en amplitud, o **saturación**, y
- limitación en velocidad, o **slew-rate**.

Hay dos formas básicas de atacar el problema de las limitaciones de actuación,

(I) realizar el diseño de modo que las limitaciones nunca se alcancen (conservador),

(II) realizar un diseño que tenga en cuenta las limitaciones.

Nosotros hemos presentado una forma de realizar la segunda opción como compensación **anti-wind-up** que se agrega a un controlador bipropio y de fase mínima ya diseñado.