10. Diseño avanzado de controladores SISO

Parte 1

Panorama de la Clase:

- Introducción
- La **Parametrización Afín** (PA)
- Diseño basado en PA: caso estable
  - Consideraciones de diseño: ceros de fase no mínima

Introducción

Este capítulo presenta una nueva manera de expresar una función transferencia de un controlador, es decir, una nueva **parametrización** del controlador.

La característica más sobresaliente de esta nueva parametrización es que permite expresar las funciones de sensibilidad como funciones **afines** en la variable de diseño. Por ello se conoce como la **parametrización afín** (PA).

La PA es muy útil cuando se busca **optimizar** un controlador, tarea que se simplifica mucho cuando la función a optimizar depende en forma afín del parámetro a optimizar.

Así, la PA permitió en gran medida el desarrollo formidable de nuevos métodos de control óptimo ($\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_\infty$) en los años ’80s.

Los temas que veremos en este capítulo son

- Revisión: la idea de inversión.
- La **Parametrización Afín** (PA)
- Diseño basado en PA: caso estable
  - Consideraciones de diseño
  - Ajuste de PIDs con PA
  - Ajuste de sistemas con retardo con PA
- Diseño basado en PA: caso inestable

Para este capítulo remitimos al apunte **Parametrización Afín de Controladores SISO**, disponible en las páginas internet de la asignatura.

De vuelta a la idea de inversión

Como vimos, el control depende implícita y explícita en la idea de **inversión del modelo de la planta**. La forma más obvia de ver esta dependencia es el control a lazo abierto.

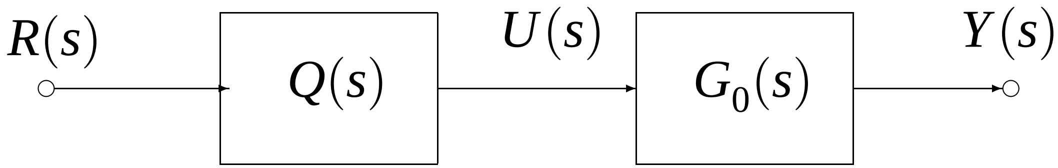

Figura 1: Control a lazo abierto

En el control a lazo abierto, la señal de control $U(s)$ se genera a partir de la referencia $R(s)$ mediante una función transferencia $Q(s)$ en la forma

$$U(s) = Q(s)R(s).$$

Así, la función transferencia entrada-salida resultante es

(1) $$T_0(s) = G_0(s)Q(s).$$

Esta simple fórmula muestra que $T_0(j\omega)$ será 1 sólo en aquellas frecuencias en las que $Q(j\omega)$ sea la inversa de $G_0(j\omega)$.

Una característica clave de la fórmula de $T_0(s)$ en el control a lazo abierto es que $T_0(s) = G_0(s)Q(s)$ es **afín** en $Q(s)$.

Por otro lado, en el control por realimentación con un controlador $K(s)$,

(2) $$T_0(s) = \frac{G_0(s)K(s)}{1 + G_0(s)K(s)},$$

que es **alineal** en $K(s)$.

Comparando (1) y (2), vemos que la dependencia afín se logra, en términos de $K(s)$, si escribimos $Q(s)$ como

(3) $$Q(s) = \frac{K(s)}{1+K(s)G_0(s)}.$$

Despejando $K(s)$ de (3), obtenemos la siguiente representación alternativa de $K(s)$,

(4) $$K(s) = \frac{Q(s)}{1-Q(s)G_0(s)},$$

que es la idea esencial en que se basa la parametrización afín que vamos a presentar y sus métodos de diseño asociados.

Diseño basado en la parametrización afín

A partir de la expresión (4) del controlador, vamos a trabajar con $Q(s)$ como variable de diseño, en vez de la original $K(s)$ como veníamos haciendo hasta ahora.

Como la relación entre $Q(s)$ y $K(s)$ es uno-a-uno, no hay pérdida de generalidad en trabajar con $Q(s)$.

La primera cuestión que consideramos es la de **estabilidad**.

> *Dado un modelo nominal de la planta $G_0(s)$, ¿cómo debe ser $K(s)$ para producir un lazo cerrado estable?*

Esta cuestión, aparentemente muy difícil de responder en base a $K(s)$, se resuelve simplemente en términos de $Q(s)$:

$$\boxed{Q(s) \textbf{ debe ser estable.}}$$

Lema 1. [Parametrización afín para sistemas estables]
Sea un sistema con modelo nominal estable $G_0(s)$ *controlado en una estructura en realimentación de un grado de libertad, con un controlador* $K(s)$ *propio.*

Entonces el lazo nominal es internamente estable si y sólo si $K(s)$ *puede expresarse en la forma*

$$\boxed{K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)}}, \tag{5}$$

donde $Q(s)$ *es una función transferencia estable y propia.*

Demostración: La estabilidad interna del lazo se garantiza si las 4 funciones de sensibilidad $T_0(s), S_0(s), S_{i0}(s)$ y $S_{u0}(s)$ son estables.

Reemplazando $K(s)$ de (5) en las expresiones de estas funciones obtenemos

(6) $$T_0(s) = Q(s)G_0(s),$$

(7) $$S_0(s) = 1 - Q(s)G_0(s),$$

(8) $$S_{i0}(s) = [1 - Q(s)G_0(s)]G_0(s),$$

(9) $$S_{u0}(s) = Q(s).$$

Como la planta $G_0(s)$ es estable y propia, y las 4 funciones de sensibilidad son funciones afines en $Q(s)$, éstas serán estables y propias si y sólo si $Q(s)$ lo es, que es lo que se quería demostrar. $\square$

El controlador escrito en términos de $Q(s)$ puede representarse esquemáticamente como se ve en el diagrama de bloques de la Figura 2.

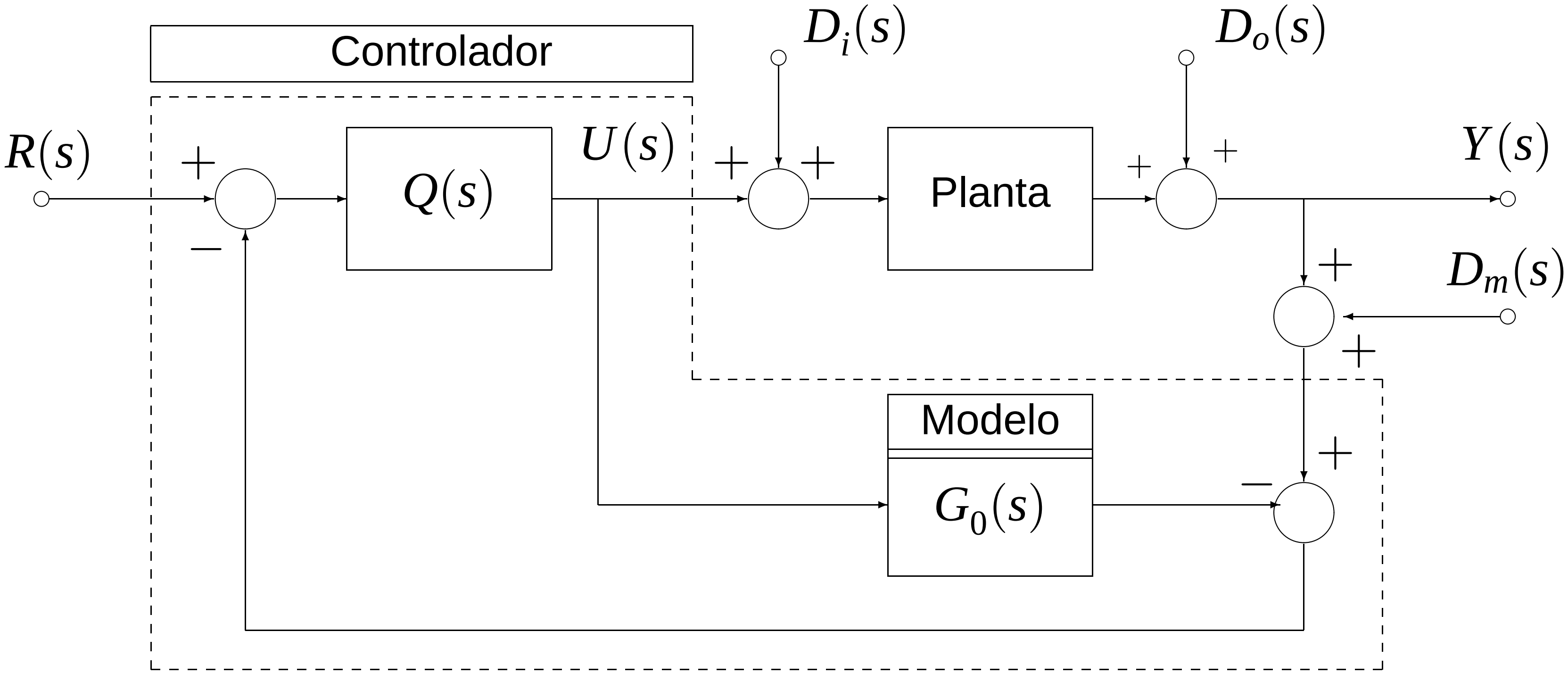

Figura 2: Control vía parametrización afín (plantas estables)

En este lazo, por el Lema 1, vamos a tener la garantía de que el lazo será internamente estable para cualquier $Q(s)$ que coloquemos, basta que ésta sea estable y propia. No olvidemos que este resultado se basa en que **la planta** $G_0(s)$ **también es estable.**

Consideraciones de diseño

De las ecuaciones (6) a (9) vemos que, usando $Q(s)$, podemos diseñar **una** de las cuatro funciones de sensibilidad; las tres restantes son obviamente especificadas por esta elección.

Esta elección se simplifica, pues todas las sensibilidades resultan funciones lineales, o mejor dicho, **afines** en $Q(s)$.

Veamos cómo elegir $Q(s)$ de modo de reflejar las consideraciones de diseño que ya discutimos; por ejemplo que $|S_0(j\omega)|$ debe ser pequeña a bajas frecuencias, para rechazar perturbaciones, y luego crecer a 1 a frecuencias altas, para que $|T_0(j\omega)|$ sea pequeña y podamos rechazar ruido de medición.

Una elección razonable bajo estas circunstancias podría ser

$$Q(s) = F_Q(s)[G_0(s)]^{-1} \tag{10}$$

donde $F_Q(s)$ es un filtro pasabajos de ancho de banda adecuado, y $[G_0(s)]^{-1}$ es la **inversa exacta** del modelo nominal de la planta $G_0(s)$.

La presencia de $F_Q(s)$ es clave; permite que $Q(s)$ sea propia aún cuando $[G_0(s)]^{-1}$ resulte impropia.

Aunque la solución prototipo (10) es un punto de partida útil, es necesario en general refinarla para tener en cuenta consideraciones de diseño más detalladas. Entre ellas, vamos a ir analizando una a una las que tienen que ver con

- ceros de fase no mínima
- grado relativo del modelo nominal
- rechazo de perturbaciones
- esfuerzo de control
- robustez

Ceros de fase no mínima

Dado que si $G(s)$ es estable, lo único que necesitamos para que el lazo sea internamente estable es $Q(s)$ que sea propia y estable.

Por lo tanto, si $G(s)$ tiene ceros de fase no mínima, entonces **no** podremos incluirlos en $[G(s)]^{-1}$ para realizar la solución prototipo (10).

Una alternativa en este caso es reemplazar (10) por

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s)$$

donde $G_0^i(s)$ es una **aproximación estable** de $[G(s)]^{-1}$. En el caso de **ceros con parte real estrictamente positiva** (es decir, no sobre el eje $j\omega$), podemos separar los factores estables e inestables del numerador de $G_0(s)$ en la forma

$$(11) \qquad G_0(s) = \frac{B_{0e}(s)B_{0i}(s)}{A_0(s)}, \quad \begin{cases} B_{0e}(s) & \text{factores estables} \\ B_{0i}(s) & \text{factores inestables} \end{cases}$$

tal que $B_{0i}(0) = 1$. Entonces una aproximación estable posible de $[G(s)]^{-1}$ es

$$(12) \qquad G_0^i(s) = \frac{A_0(s)}{B_{0e}(s)B_{0i}(-s)}.$$

Notemos que si $B_{0i}(s)$ contiene todos los factores (estrictamente) inestables del numerador de $G_0(s)$, entonces $B_{0i}(-s)$ es estable. Y más aún,

$$|G_0^i(j\omega)| = \frac{|A_0(j\omega)|}{|B_{0e}(j\omega)||B_{0i}(-j\omega)|} = \frac{|A_0(j\omega)|}{|B_{0e}(j\omega)||B_{0i}(j\omega)|} = |G_0(j\omega)|^{-1}.$$

Es decir, esta inversa es **exacta en magnitud** sobre el eje $j\omega$.

Ejemplo 1. *Tomemos el modelo nominal*

$$G_0(s) = \frac{(s+1)(-2s+1)}{s^2+s+1}.$$

Entonces la aproximación estable de la inversa propuesta es

$$G_0^i(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(2s+1)}.$$

$\square$

Notemos que la propuesta (12) para $G_0^i(s)$ sólo sirve si los factores inestables en el numerador de $G_0(s)$ son **estrictamente inestables** (tienen parte real positiva).

Para el caso de ceros sobre el eje $j\omega$ podemos simplemente omitirlos en la aproximación, es decir, proponer

$$G_0^i(s) = \frac{A_0(s)}{B_{0e}(s)}. \tag{13}$$

Es importante sin embargo notar que la factorización (11) debe ser tal que $B_{0i}(0) = 1$, pues de lo contrario no lograríamos inversión de $G_0(s)$ en $s = 0$.

En resumen, para construir $G_0^i(s)$,

- los factores inestables del numerador de $G_0(s)$ con parte real positiva se **«espejan»** respecto del eje $j\omega$;
- los factores inestables con parte real cero se omiten, conservando sólo la ganancia en $s = 0$.