10. Diseño avanzado de controladores SISO

Parte 2

Panorama de la Clase:

- Repaso: **Parametrización Afín** (PA)
- Consideraciones de diseño:
  - grado relativo
  - rechazo de perturbaciones
  - esfuerzo de control
  - robustez

Repaso: Parametrización afín (PA)

La parametrización afín es una forma de describir **la familia de todos los controladores** $K(s)$ **que estabilizan a una planta dada** $G_0(s)$**.**

Vimos que para una planta $G_0(s)$ propia y **estable**, en una configuración en realimentación de un grado de libertad, esta familia está formada por todas las funciones $K(s)$ propias que pueden expresarse en la forma

(1)
$$\boxed{K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)}},$$

donde $Q(s)$ es una función transferencia **estable y propia** cualquiera.

Así, la determinación de un controlador $K(s)$ apropiado para una planta $G_0(s)$ puede trasladarse a la determinación de una función $Q(s)$ apropiada.

Dos ventajas importantes de trabajar con $Q(s)$ en vez de $K(s)$:

(a) la estabilidad interna es inmediata: basta que $Q(s)$ sea estable y propia;

(b) las funciones de sensibilidad son mucho más simples en términos de $Q(s)$:

$$
\begin{aligned}
T_0(s) &= Q(s)G_0(s), \\
S_0(s) &= 1 - Q(s)G_0(s), \\
S_{i0}(s) &= [1 - Q(s)G_0(s)]G_0(s), \\
S_{u0}(s) &= Q(s).
\end{aligned}
$$

No es necesario calcular el controlador $K(s)$ una vez determinada $Q(s)$; el controlador puede implementarse directamente en términos de $Q(s)$.

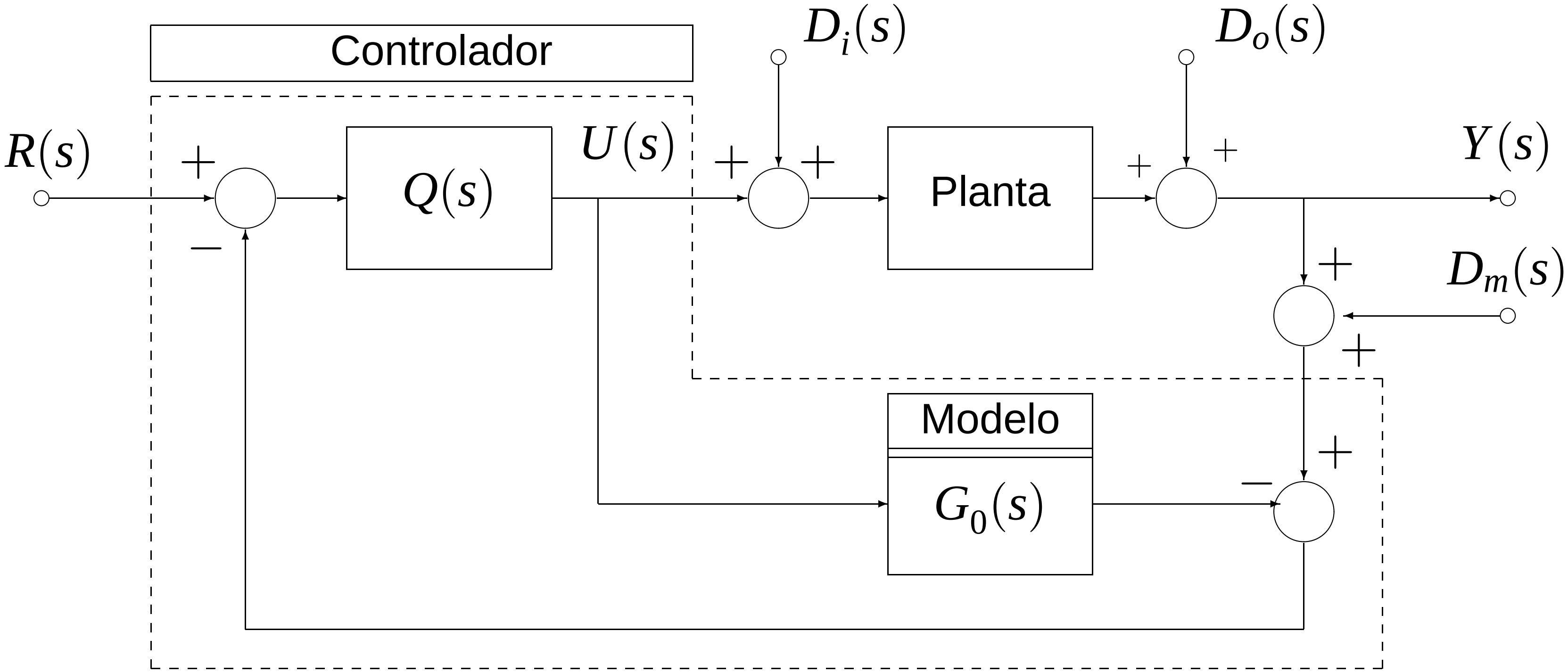

Figura 1: Control vía parametrización afín (plantas estables)

Ahora, **¿cómo elegir $Q(s)$?** Comenzamos a ver en la clase pasada consideraciones de diseño que nos orientan en la elección de $Q(s)$.

Para el prototipo básico usamos la idea de **inversión**: como

$$T_0(s) = Q(s)G_0(s),$$

proponemos $Q(s)$ como **una inversa estable aproximada de la planta**,

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s),$$

donde $G_0^i(s)$ es una aproximación estable de $[G(s)]^{-1}$, de modo que

$$\boxed{T_0(s) \approx F_Q(s).}$$

Vemos que la función $F_Q(s)$ es **la sensibilidad complementaria deseada.**

Consideraciones de diseño para $Q(s)$ (continuación)

Además de la estabilidad del lazo, requerimiento básico de todo diseño de control, hay, como sabemos, otros requerimientos que hacen al desempeño del sistema (por ejemplo, la respuesta en régimen permanente). Estos requerimientos se trasladan a condiciones en la elección de $Q(s)$.

Ya discutimos las condiciones en la elección de $Q(s)$ cuando $G_0(s)$ tiene **ceros de fase no mínima**. En lo que sigue discutiremos las condiciones derivadas de

- el grado relativo de $G_0(s)$,
- las propiedades de rechazo de perturbaciones del lazo,
- el esfuerzo de control generado,
- la robustez del diseño.

Grado relativo del modelo nominal

Para obtener un controlador propio es necesario que $Q(s)$ sea propia. Como

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s)$$

entonces **es necesario que el filtro $F_Q(s)$ tenga grado relativo igual o mayor al de $[G_0^i(s)]^{-1}$.**

Esto puede lograrse simplemente incluyendo factores de la forma $(\tau s + 1)^{n_d}$, con $\tau > 0$, en el denominador de $F_Q(s)$.

Rechazo de perturbaciones

Respuesta en régimen permanente. Analizando las expresiones de las funciones de sensibilidad de entrada y salida en términos de $Q(s)$,

$$S_0(s) = 1 - Q(s)G_0(s),$$
$$S_{i0}(s) = [1 - Q(s)G_0(s)]G_0(s),$$

podemos ver que para lograr rechazo asintótico perfecto de una perturbación en la frecuencia ω_i, basta con requerir que en esa frecuencia $Q(j\omega_i)G_0(j\omega_i) = 1$.

Por ejemplo, para obtener rechazo asintótico exacto de perturbaciones constantes es suficiente con requerir que

(2) $$\boxed{Q(0)G_0(0) = 1}.$$

A partir del requerimiento (2) es posible caracterizar **la familia de funciones** $Q(s)$ que garantizarán el rechazo asintótico exacto de perturbaciones constantes.

Lema 1. [$Q(s)$ para rechazo de perturbaciones constantes] *Sea* $G_0(s)$ *un modelo nominal estable con perturbaciones constantes a la entrada o a la salida.*

Entonces, un lazo de control de un grado de libertad será estable y tendrá error nulo en régimen permanente si y sólo si el controlador $K(s)$ *puede expresarse en la parametrización afín con* $Q(s)$ *de la forma*

$$Q(s) = s\bar{Q}(s) + [G_0(0)]^{-1}Q_a(s), \tag{3}$$

donde $\bar{Q}(s)$ *y* $Q_a(s)$ *son funciones estables arbitrarias, con* $Q_a(s)$ *tal que* $Q_a(0) = 1$. $\square$

El Lema determina la familia de todos los controladores $K(s)$ que, para un modelo nominal $G_0(s)$ estable, alcanzan estabilidad interna del lazo nominal **y además** rechazo asintótico exacto de perturbaciones constantes.

Estos controladores son los de la forma (1) donde $Q(s)$ es de la forma (3). Una posibilidad particularmente simple en (3) es elegir $Q_a(s) = 1$.

Ejemplo 1. [Q para rechazo de perturbaciones constantes] *Sea el modelo nominal $G_0(s) = \frac{s-1}{s+2}$. Como la planta es de fase no mínima, construimos $Q(s)$ con una inversa aproximada estable de la planta tomando $G_0^i(s) = \frac{-(s+2)}{s+1}$, que da*

$$Q(s) = \overbrace{\left(\frac{1}{\tau s+1}\right)}^{F_Q(s)}\overbrace{\left(-\frac{s+2}{s+1}\right)}^{G_0^i(s)}.$$

Notemos que esta elección de $G_0^i(s)$ ya tiene en cuenta el rechazo de perturbaciones constantes, ya que

$$Q(0) = -2 = G_0(0),$$

de acuerdo a (1)*. La función de sensibilidad complementaria $T_0(s)$ resulta*

$$T_0(s) = Q(s)G_0(s) = \frac{-s+1}{(\tau s+1)(s+1)}.$$

Notemos que $|T_0(j\omega)|$ tiene frecuencia de corte $\omega_c = 1/\tau$, por lo que para tener en cuenta las limitaciones en la respuesta transitoria impuestas por el cero de fase no mínima, deberíamos elegir $\tau > 1$.

La Figura 2 muestra la respuesta a un escalón unitario de referencia del sistema a lazo cerrado para tres valores de τ.

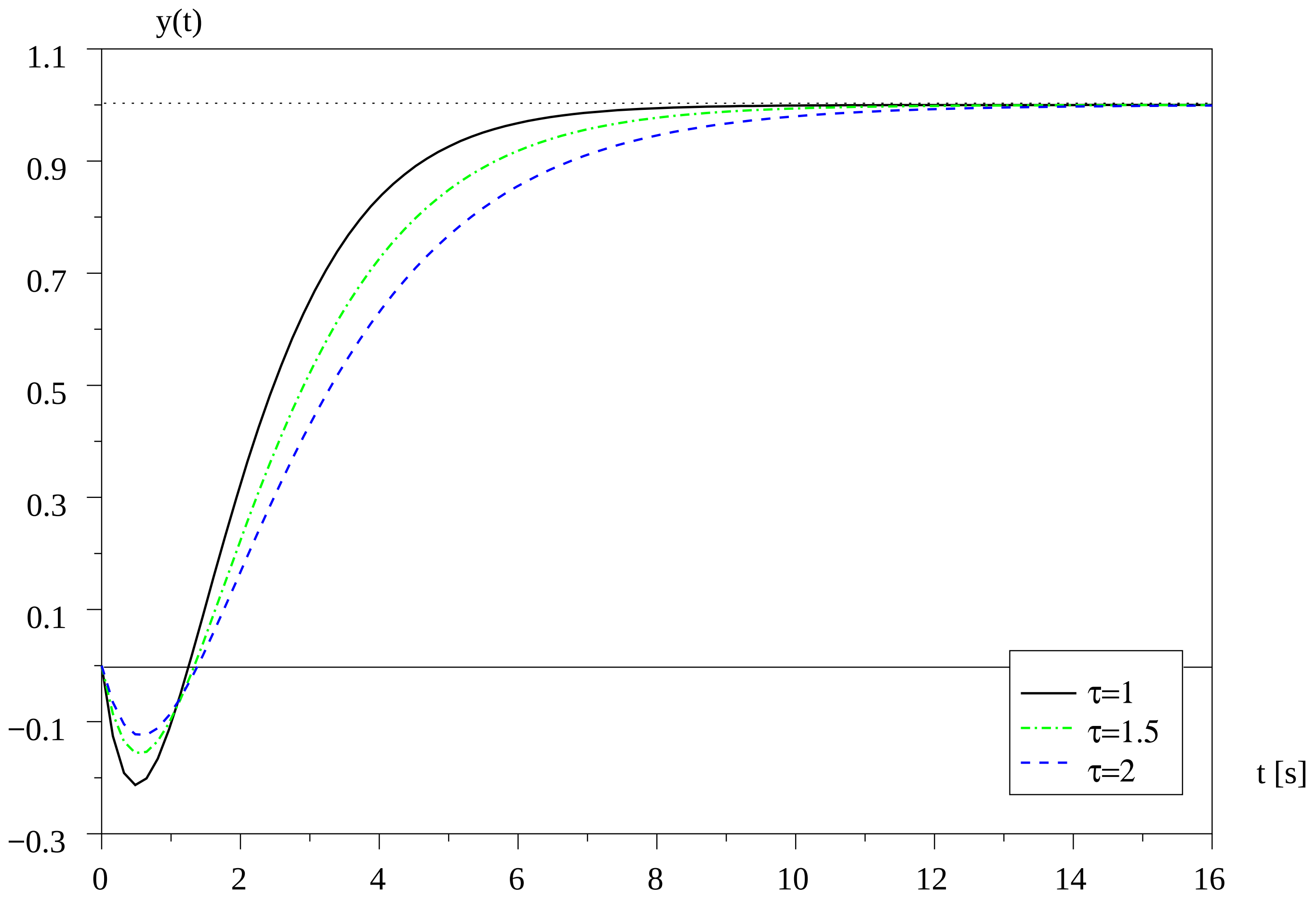

Figura 2: Respuesta del sistema del Ejemplo 1

El Lema 1 se extiende a perturbaciones sinusoidales de frecuencia ω_i; ver el apunte *Parametrización Afín de Controladores SISO* o el Capítulo 15 del libro CSD.

Compromisos de diseño. Cuando se utiliza $Q(s)$ para que se cancelen polos estables no deseados de $G_0(s)$, existe un compromiso de diseño entre las sensibilidades $S_0(s)$ y $S_{i0}(s)$ obtenidas.

Dado que

$$S_0(s) = 1 - Q(s)G_0(s),$$
$$S_{i0}(s) = [1 - Q(s)G_0(s)]G_0(s),$$

si $Q(s)$ por ejemplo se elige para que $[1 - Q(s)G_0(s)]$ cancele un polo lento de $G_0(s)$, digamos en $s = -a$, (para mejorar los transitorios a perturbaciones de entrada), necesariamente $S_0(s)$ tendrá un *cero lento*, en $s = -a$, lo que alterará los transitorios a perturbaciones de salida (habrá un pico en la ganancia de $S_0(j\omega)$).

Esfuerzo de control

Recordemos que la función de sensibilidad que define la transferencia a lazo cerrado entre perturbaciones a la salida $d_0(t)$ y la señal de contro $u(t)$ es, en la parametrización afín,

$$S_{u0}(s) = Q(s).$$

Dado que las plantas generalmente se asemejan a filtros pasabajos, la idea de aproximar $Q(s)$ a la inversa de la planta dentro de un rango de frecuencias deseado dará una $Q(s)$ que se aproximará a un *filtro pasaaltos*.

Así, en el rango de frecuencias en que el ancho de banda de lazo cerrado *supera* el ancho de banda a lazo abierto, $S_{u0}(s)$ tendrá necesariamente alta ganancia, que redundará en grandes valores de $u(t)$ para compensar perturbaciones en esas frecuencias.

Como los valores máximos de $u(t)$ están limitados por el actuador, existirá un compromiso de diseño entre saturar el actuador y rechazar perturbaciones.

Ejemplo 2. [Esfuerzo de control versus ancho de banda] *Consideremos el modelo nominal* $G_0(s) = \frac{1}{s+1}$, *con ancho de banda* $[0,1]$ *rad/s.*

Como la planta es de fase mínima, un diseño vía la parametrización afín puede ser simplemente

$$Q(s) = F_Q(s)[G_0(s)]^{-1} = \frac{s+1}{\tau s+1},$$

donde $\tau > 0$ *es la variable que define el ancho de banda a lazo cerrado,* $[0, 1/\tau]$ *rad/s.*

Supongamos que, a fin de atenuar perturbaciones, imponemos que $Q(s)$ *aproxime la inversa de la planta en el rango de* *frecuencias* $\omega \in [0, 10]$ *rad/s. Así,* $Q(j\omega) \approx |G(j\omega)|^{-1}$ *en ese rango, lo que puede lograrse eligiendo* $\tau \geq 1/10$*.*

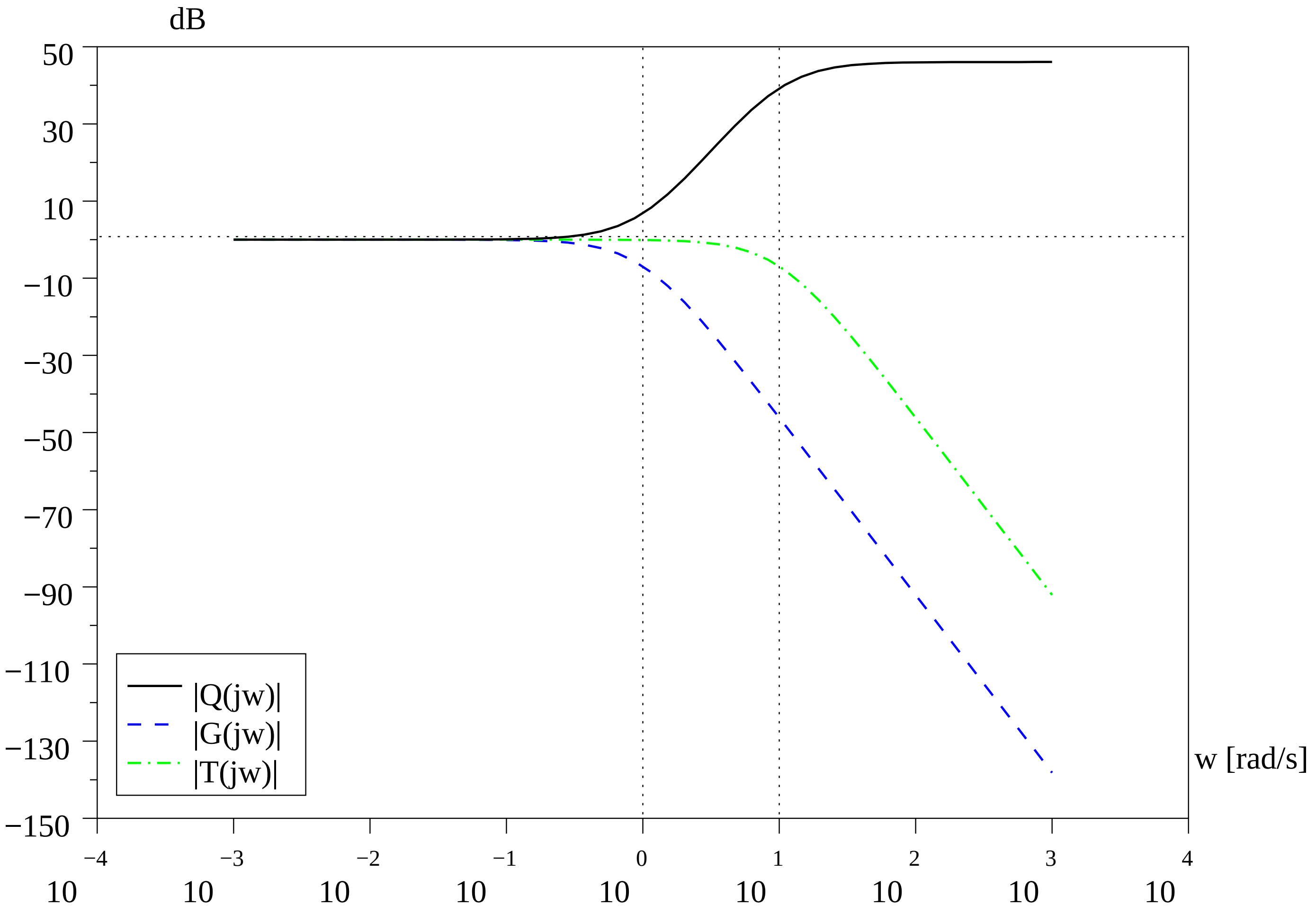

Figura 3: Diagramas de Bode de magnitud en el Ejemplo 2

La Figura 3 muestra los diagramas de Bode de magnitud de $Q(s)$, $G_0(s)$ y $T_0(s)$. Vemos que $Q(s)$ resulta de alta ganancia en el rango de frecuencias $\omega \geq 1$, lo que dará buena atenuación de perturbaciones para $\omega \in [0,10]$, pero al costo de un gran esfuerzo de control.

Cuanto mayor se elija τ, mayor será la alta ganancia de $Q(s)$, que puede llevar a saturación del actuador. Conclusión: no debe excederse el ancho de banda de lazo cerrado más allá de lo necesario. $\square$

Robustez

Recordemos que un resultado fundamental para asegurar robustez del lazo cerrado es que $|T_0(j\omega)|$ debe decaer antes de las frecuencias donde los errores de modelado se vuelvan significativos.

En el marco de la parametrización afín, el requerimiento de robustez puede satisfacerse mediante una elección apropiada de $F_Q(s)$, que determina la transferencia $T_0(s)$ deseada.

Resumen de consideraciones de diseño en la elección de $Q(s)$ para plantas estables

Vimos que una solución prototipo para la elección de $Q(s)$ es simplemente la inversa de la función transferencia de la planta $G_0(s)$. Sin embargo, esta solución «ideal» debe modificarse en la práctica de acuerdo a los siguientes casos.

- **Ceros de fase no mínima.** El requerimiento de estabilidad interna prohibe la cancelación de estos ceros, por lo que necesariamente aparecerán en $T_0(s)$. El ancho de banda de lazo cerrado deberá observar las limitaciones en la respuesta del sistema impuestas por estos ceros.
- **Grado relativo.** El grado relativo del modelo nominal $G_0(s)$ impone un límite inferior al grado relativo de $T_0(s)$, de modo que $Q(s)$, y por lo tanto $K(s)$, resulten propias.

- **Rechazo de perturbaciones.** El rechazo asintótico exacto de perturbaciones requiere $Q(j\omega_i) = [G_0(j\omega_i)]^{-1}$ en las frecuencias ω_i de las perturbaciones. Existen compromisos de diseño en $Q(s)$ para el rechazo de perturbaciones de entrada $d_i(t)$ o de salida $d_o(t)$.
- **Esfuerzo de control.** Dado que típicamente $G_0(s)$ es pasabajos, al aproximar $Q(s)$ a la inversa de $G_0(s)$ hacemos que $Q(s)$, y por lo tanto $S_{u0}(s)$, sean pasaaltos. Esta característica impone un compromiso de diseño entre el rechazo de perturbaciones y el esfuerzo de control dentro del ancho de banda especificado para el sistema a lazo cerrado.
- **Robustez.** Los errores de modelado usualmente se hacen significativos a frecuencias altas, por lo que $T_0(s)$ deberá diseñarse de modo de que su ganancia decaiga en estos rangos de frecuencias, a fin de conservar la estabilidad del sistema frente a errores de modelo.