

10. Diseño avanzado de controladores SISO

Parte 4

Panorama de la Clase:

- PA cuando hay polos indeseables (continuación)
 - Diseño de PID reconsiderado
- Estructura Q para plantas inestables
- Un esquema antiwindup en estructura Q

PA con polos indeseables

Hemos visto en la clase pasada cómo incorporar restricciones adicionales a $Q(s)$ para evitar que aparezcan polos indeseables (incluyendo polos inestables) en las funciones de sensibilidad de lazo cerrado.

Básicamente, los requisitos se resumen a que el controlador se parametrize en la forma afín, $K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)}$, y además que

1. $Q(s)$ sea propia, estable y sólo tenga polos deseables,
2. $Q(p_i) = 0$ para todo polo indeseable p_i de $G_0(s)$,
3. $Q(p_i)G_0(p_i) = 1$ para todo polo indeseable p_i de $G_0(s)$.

Recordar, que toda cancelación polo-cero inestable en la expresión $K(s)$ deberá resolverse **analíticamente**, antes de implementar el controlador.

De nuevo, diseño de PID

Volvemos al diseño de controladores PID vía PA, ahora incorporando la posibilidad de eliminar polos indeseables del lazo.

Consideremos, como ilustración y para comparar con el diseño anterior, el modelo nominal genérico de primer orden

$$G_0(s) = \frac{k_0}{v_0s + 1}.$$

El diseño visto en la clase anterior daba un controlador PI con ganancias (forma paralelo) $K_p = v_0/(k_0\alpha)$ y $K_i = 1/(k_0\alpha)$, que garantizaban tanto seguimiento de referencias como rechazo de perturbaciones constantes en forma asintótica exacta.

La función de sensibilidad complementaria obtenida era $T_0(s) = 1/(\alpha s + 1)$, que permite ajustar fácilmente la velocidad

del sistema con el parámetro α , tanto en respuesta a referencias, como a perturbaciones de salida.

Este diseño simple forzaba la cancelación del polo a lazo abierto de la planta en $s = 1/v_0$. Esta cancelación hace que el factor $(v_0s + 1)$ no aparezca en $T_0(s)$ ni en $S_0(s)$, pero sí en

$$S_{i0}(s) = S_0(s)G_0(s) = \frac{k_0\alpha s}{(\alpha s + 1)(v_0s + 1)}.$$

Por lo tanto, la respuesta a **perturbaciones de entrada** (gobernadas por $S_{i0}(s)$) seguirá siendo dominada por el polo en $s = 1/v_0$ si $v_0 > \alpha$ (como es normalmente el caso).

La Figura 1 muestra las respuestas a una perturbación de entrada del lazo controlado con este diseño de PI para distintos valores de α . Podemos ver cómo los valores de α cambian la amplitud de los transitorios, pero no su dinámica.

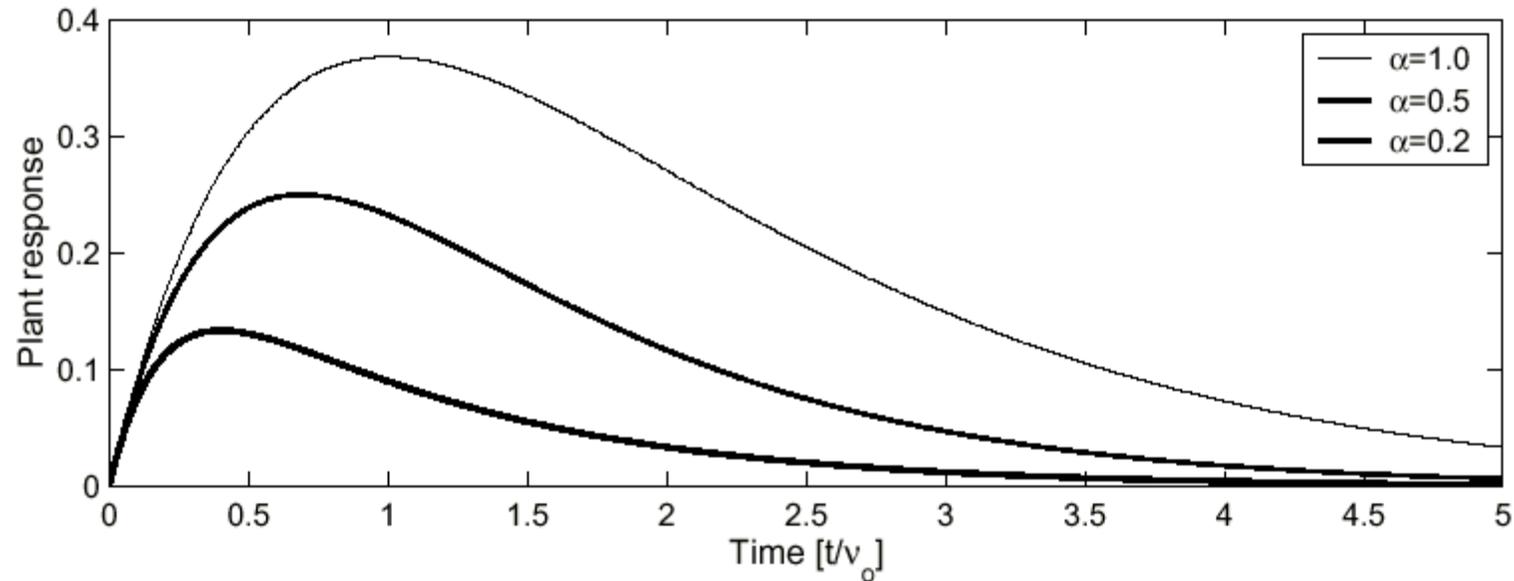


Figura 1: Rechazo de perturbaciones de entrada con PI diseñado en base a la cancelación del polo de la planta

El origen de este problema es precisamente la cancelación del polo de $G_0(s)$ con un cero en $K(s)$. Como vimos en la clase anterior, para evitar el polo indeseable en $S_{i0}(s)$ debemos elegir $F_Q(s)$ de modo que $S_0(s) = 1 - Q(s)G_0(s)$ tenga un cero allí.

Vamos a replantear el diseño para mejorar la respuesta a perturbaciones de entrada. Comenzamos como siempre de la base $Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s)$, donde, como antes, la inversa $G_0^i(s) = \frac{v_0s+1}{k_0}$ es exacta.

Ahora proponemos $F_Q(s)$ de segundo orden como

$$(1) \quad F_Q(s) = \frac{\beta_1s + 1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} = \frac{\beta_1s + 1}{\alpha_2s^2 + \alpha_1s + 1}.$$

con un cero para mantener el grado relativo y tener más grados de libertad de diseño (comparar la $F_Q(s)$ propuesta antes).

El controlador resultante de tal $F_Q(s)$ es

$$(2) \quad K(s) = \frac{F_Q(s)}{G_0(s)(1 - F_Q(s))} = \frac{(\beta_1s + 1)(v_0s + 1)}{k_0(\alpha_2s^2 + \alpha_1s + 1)}.$$

Analicemos la expresión de $S_0(s)$ resultante,

$$S_0(s) = 1 - F_Q(s) = \frac{(\alpha_2 s + \alpha_1 - \beta_1)s}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}.$$

Para garantizar que $S_0(-\frac{1}{v_0}) = 0$, es necesario que $F_Q(-\frac{1}{v_0}) = 1$, es decir

$$F_Q\left(-\frac{1}{v_0}\right) = \frac{(-\beta_1 + v_0)v_0}{\alpha_2 - \alpha_1 v_0 + v_0^2} = 1,$$

de donde obtenemos $\boxed{\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2/v_0}$.

Con este valor de β_1 reemplazado en la expresión (2) del controlador $K(s)$ llegamos a

$$K(s) = \frac{(v_0 \alpha_1 - \alpha_2)s + v_0}{k_0 \alpha_2 s},$$

es decir, **nuevamente un PI** con ganancias (forma paralelo)

en términos de ξ y ω_n deseados, de (1),

$$K_p = \frac{2\xi\omega_n v_0 - 1}{k_0}, \quad K_i = \frac{v_0\omega_n^2}{k_0}$$

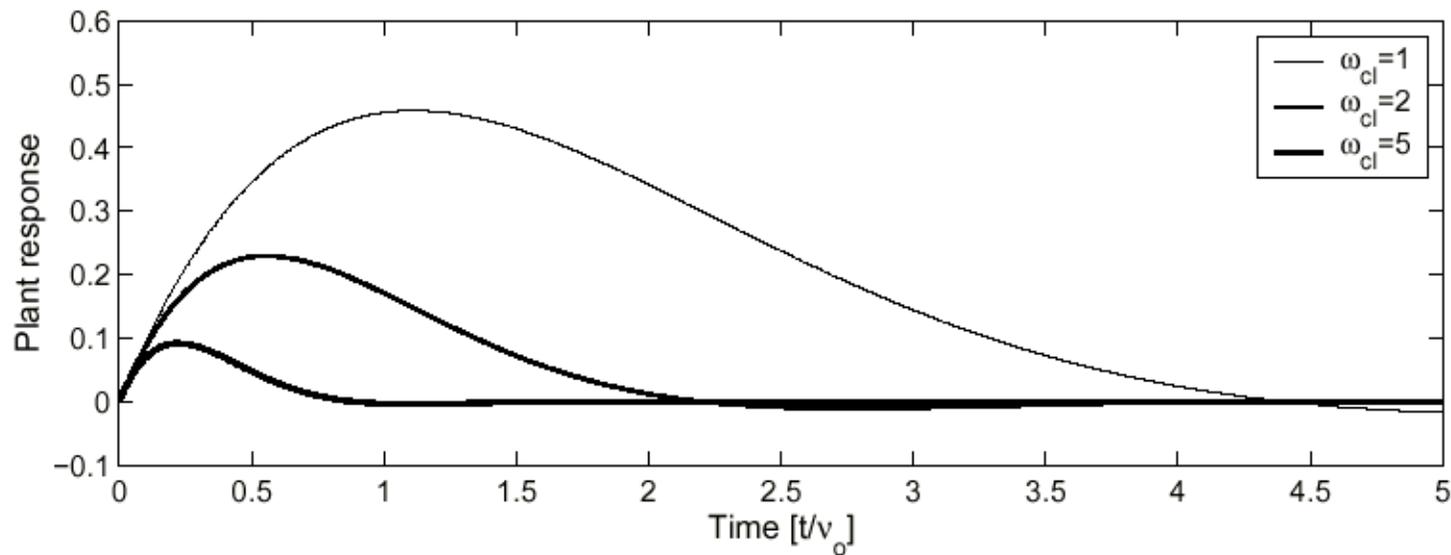


Figura 2: Rechazo de perturbaciones de entrada con PI diseñado en base a condiciones de interpolación

Podemos ver en la Figura 2 las respuestas a una perturbación de entrada para distintos valores del parámetro ω_n . Con esta versión del PI no sólo podemos disminuir la amplitud de los transitorios en el rechazo a la perturbación, sino también su dinámica, haciendo que se extingan más rápidamente.

Notar que, en contrapartida, tenemos ahora una sensibilidad complementaria nominal de **segundo orden con un cero** en

$$s = -\beta_1^{-1} = -\frac{\omega_n}{2\xi - \frac{1}{v_0\omega_n}}.$$

Este cero será en general menor a (más lento que) ω_n por lo que dará grandes sobrevalores en la respuesta a la referencia si ω_n es grande respecto al ancho de banda a lazo abierto.

En forma similar se pueden tratar los casos de diseño de PID para plantas de segundo orden o de primer orden con retardo.

Estructura Q para plantas inestables

Hasta ahora, vimos que los polos indeseables de la planta, incluyendo los inestables, podían eliminarse del lazo cerrado imponiendo restricciones de interpolación adicionales en $Q(s)$.

Sin embargo, la elección de $Q(s)$ para que satisfaga todas las restricciones puede ser una tarea muy tediosa, lo que nos lleva a la pregunta

¿Podrá reparametrizarse el controlador $K(s)$ de modo que las restricciones de interpolación necesarias para eliminar polos indeseables se satisfagan automáticamente?

La respuesta breve es **sí**, y se detalla en el siguiente lema.

Lema 1. [Parametrización afín para polos indeseables] *Sea un sistema con modelo nominal $G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)}$, donde $B_0(s)$ y $A_0(s)$ son polinomios coprimos, controlado en una estructura en realimentación de un grado de libertad, con un controlador $K(s)$ propio.*

Entonces el lazo cerrado nominal será internamente estable y todas las funciones de sensibilidad tendrán sólo polos deseables si y sólo si $K(s)$ puede escribirse en la forma

$$(3) \quad K(s) = \frac{\frac{P(s)}{E(s)} + Q_u(s) \frac{A_0(s)}{E(s)}}{\frac{L(s)}{E(s)} - Q_u(s) \frac{B_0(s)}{E(s)}},$$

donde

(a) $Q_u(s)$ es una función transferencia propia y estable con polos deseables, y

(b) $P(s)$ y $L(s)$ son polinomios que satisfacen la ecuación Diofantina

$$(4) \quad A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = E(s)F(s)$$

donde $E(s)$ y $F(s)$ son polinomios de grados adecuados y con ceros deseables.

□

Puede verse la demostración del lema en el apunte «Parametrización Afín de Controladores SISO», o en el libro CSD. Aquí nos concentraremos en las interpretaciones de este resultado.

La parametrización (3) lleva a las siguientes expresiones de las sensibilidades nominales del lazo:

$$S_0(s) = \frac{A_0(s)L(s)}{E(s)F(s)} - Q_u(s) \frac{B_0(s)A_0(s)}{E(s)F(s)}$$

$$T_0(s) = \frac{B_0(s)P(s)}{E(s)F(s)} + Q_u(s) \frac{B_0(s)A_0(s)}{E(s)F(s)}$$

$$T_{i0}(s) = \frac{B_0(s)L(s)}{E(s)F(s)} - Q_u(s) \frac{[B_0(s)]^2}{E(s)F(s)}$$

$$S_{u0}(s) = \frac{A_0(s)P(s)}{E(s)F(s)} + Q_u(s) \frac{[A_0(s)]^2}{E(s)F(s)}.$$

Podemos ver que todas resultan estables y sólo contienen polos deseados.

Nota 1. *El Lema 1 da una parametrización de $Q(s)$ que garantiza que las condiciones de interpolación se cumplen automáticamente; puede mostrarse que la función $Q(s)$ original queda ahora restringida a*

$$(5) \quad Q(s) = \frac{A_0(s)}{F(s)} \left[\frac{P(s)}{E(s)} + Q_u(s) \frac{A_0(s)}{E(s)} \right],$$

donde $Q_u(s)$ tiene polos deseados. □

Nota 2. *Si $A_0(s)$ tiene tanto polos deseables como polos indeseables, podemos factorizarla en forma acorde,*

$$A_0(s) = A_d(s)A_i(s),$$

donde $A_i(s)$ tiene los polos indeseables. En este caso podemos

escribir $E(s) = A_d(s)\bar{E}(s)$, y la ecuación Diofantina (4) pasa a

$$(6) \quad A_d(s)A_i(s)L(s) + B_0(s)P(s) = A_d(s)\bar{E}(s)F(s).$$

Esta ecuación requiere la existencia de una $\tilde{P}(s)$ tal que $P(s) = \tilde{P}(s)A_d(s)$, de modo que (6) se reduce a

$$(7) \quad A_i(s)L(s) + B_0(s)\tilde{P}(s) = \bar{E}(s)F(s).$$

Cuando $A_0(s)$ contiene **sólo** polos deseados, entonces $A_0(s) = E(s)$, $A_i(s) = 1$, y $\bar{E}(s) = 1$; así podemos tomar $L(s) = F(s)$ y $\tilde{P}(s) = 0$. El resultado del Lema 1 se reduce entonces al de plantas estables, y de (5) tenemos que

$$Q(s) = Q_u(s).$$



Ejemplo 1. Sea el modelo nominal

$$G_0(s) = \frac{s - 4}{(s - 1)(s + 4)}.$$

Pretendemos que todos los polos de lazo cerrado se ubiquen a la izquierda de $s = -0,5$ en el plano complejo. Además, requerimos que el control incluya acción integral.

Para diseñar el controlador, comenzamos planteando la ecuación Diofantina (7)

$$(s - 1)s\bar{L}(s) + (s - 4)\tilde{P}(s) = \bar{E}(s)F(s).$$

Para tener una solución única, elegimos los grados de $\bar{E}(s)F(s)$, $\tilde{L}(s)$, y $\tilde{P}(s)$ como 3, 1, y 1 respectivamente. Elegimos

$$\bar{E}(s)F(s) = (s^2 + 4s + 9)(s + 10).$$

Resolviendo la ecuación Diofantina encontramos $\tilde{L}(s) = s + \frac{263}{6}$ y $\tilde{P}(s) = -\frac{1}{6}(173s + 135)$. Así, una solución particular es

$$K(s) = -\frac{(173s + 135)(s + 4)}{s(6s + 263)}$$

Usando la parametrización (3) podemos expresar la familia de todos los controladores que dan polos deseados al lazo cerrado,

$$K(s) = \frac{-\frac{(173s+135)}{6(s^2+4s+9)} + Q_u(s)\frac{(s-1)}{(s^2+4s+9)}}{\frac{s(6s+263)}{6(s^2+4s+9)(s+4)} - Q_u(s)\frac{(s-4)}{(s^2+4s+9)(s+4)}},$$

donde $Q_u(s)$ es cualquier función propia con polos deseables.



Representación en diagrama de bloques

La parametrización del Lema 1 puede representarse en el diagrama de bloques de la Figura 3. La señal de control $U(s)$ está formada por la superposición de dos señales; una vía el lazo $\frac{P(s)}{L(s)}$, y otra vía $Q_u(s)$.

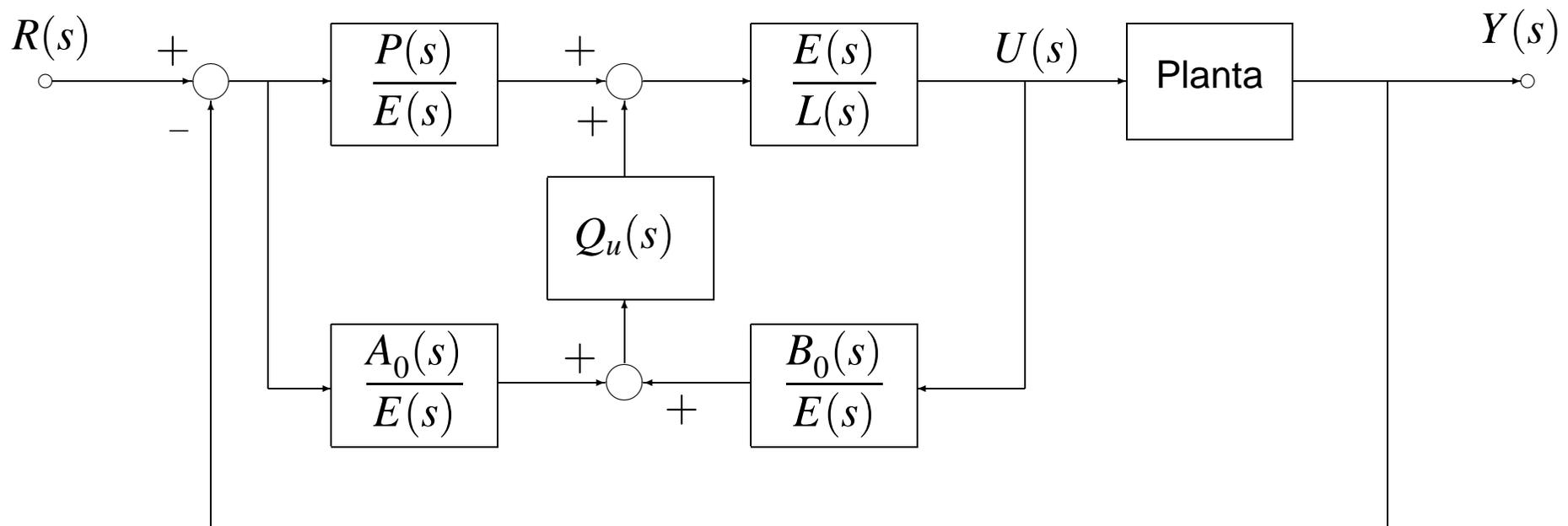


Figura 3: Parametrización Q para plantas inestables

El diagrama de la Figura 4 evidencia mejor esta superposición de señales.

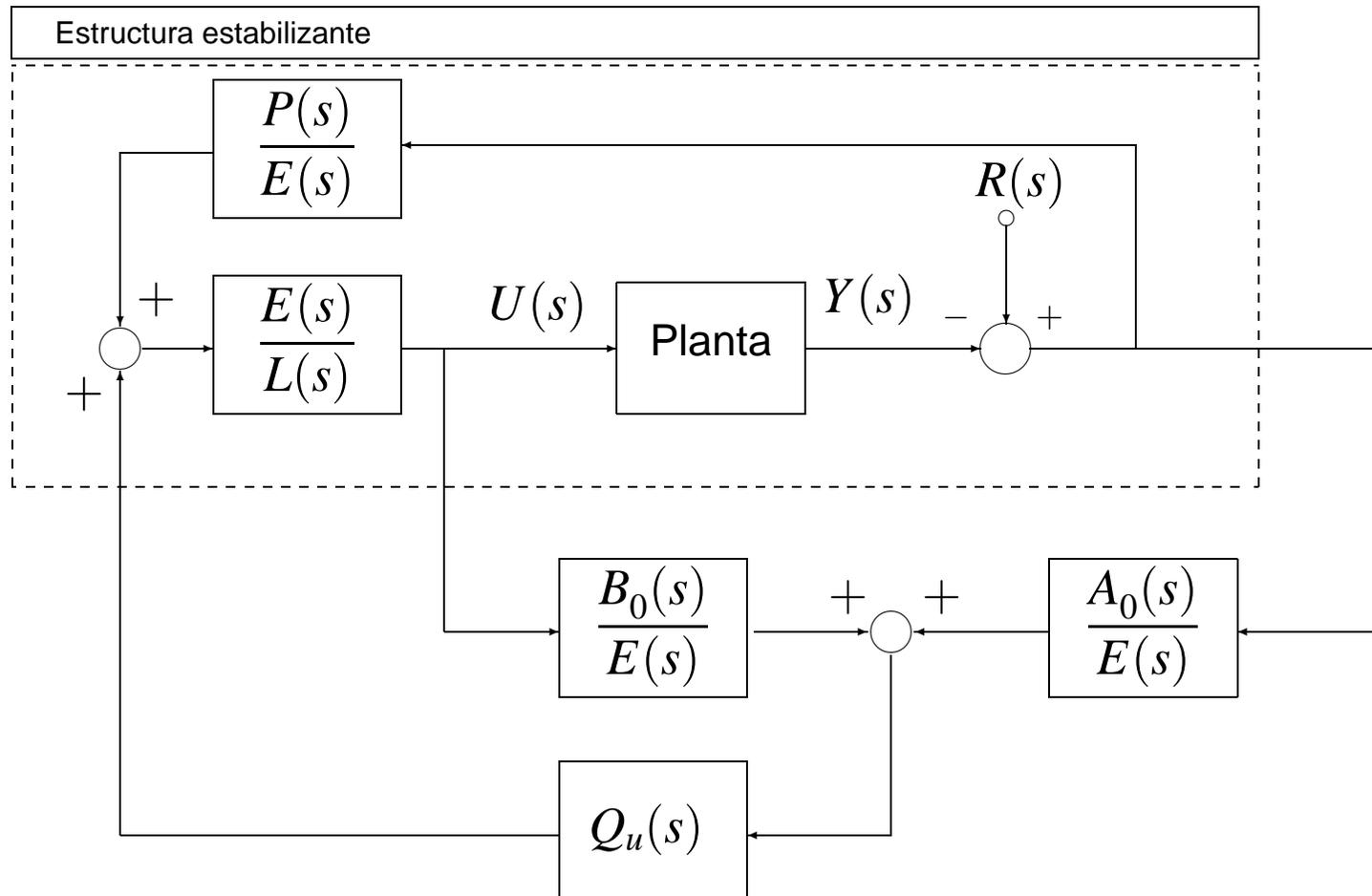


Figura 4: Estructura Q para plantas inestables rediagramada

La *estructura estabilizante* tiene la transferencia $B_0(s)/F(s)$, que surge del lazo y la ecuación Diofantina (6).

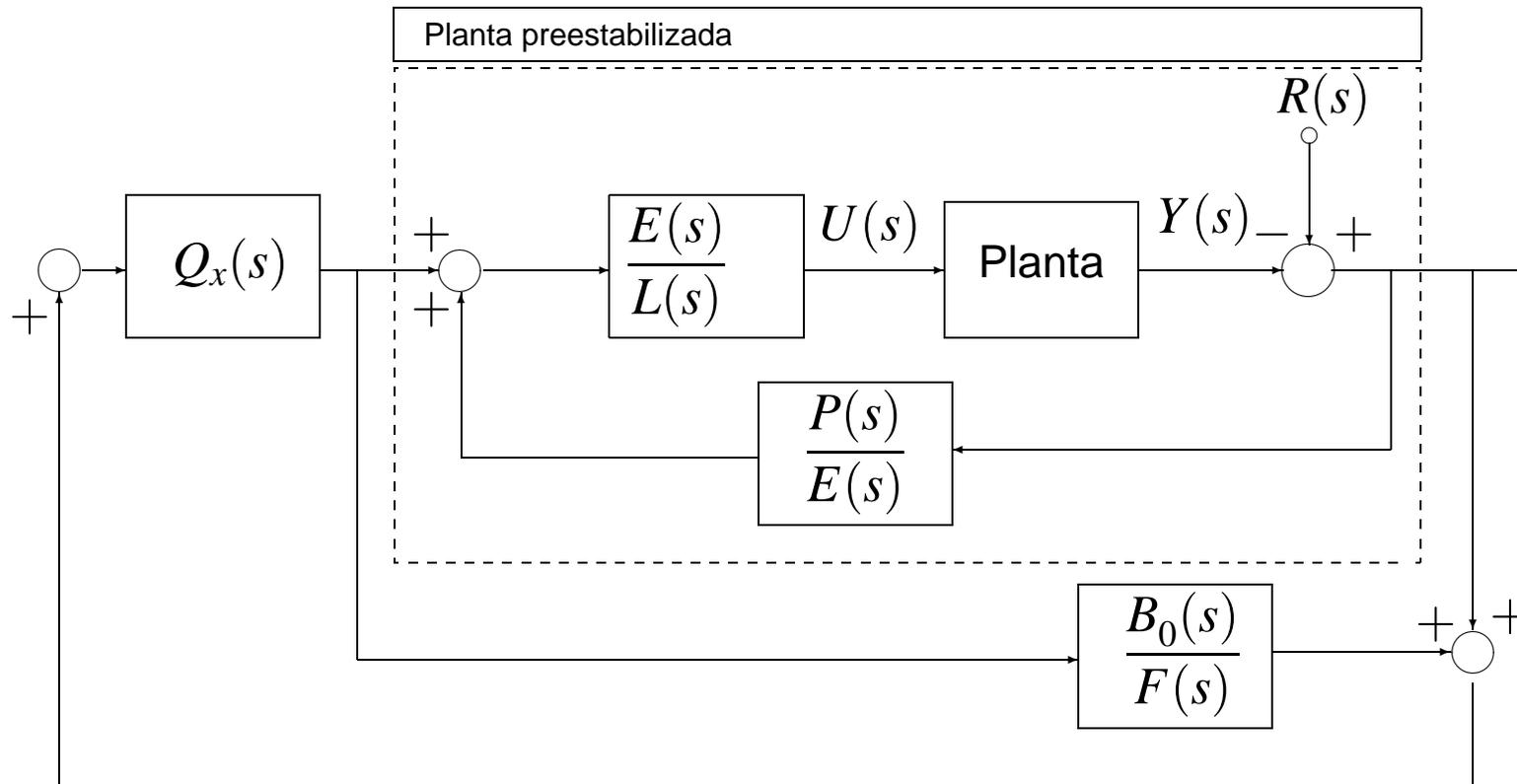


Figura 5: Interpretación Q con la planta preestabilizada

Con la planta preestabilizada, el diagrama puede llevarse a la estructura Q conocida para plantas estables, en la Figura 5.

Un esquema *antiwindup* en estructura Q

Como nota final para implementaciones, consideramos un esquema para compensación de saturación de actuadores en estructura Q . La presentaremos asumiendo la planta estable, por simplicidad; dejamos la generalización como ejercicio.

Cuando existe saturación en los actuadores, del Capítulo 9 recordemos que se puede producir **windup**, es decir un gran deterioro en el desempeño del sistema cuando los actuadores saturan y existen integradores en el controlador.

Vimos en ese capítulo un esquema antiwindup, que consistía en implementar el controlador de un modo que «saturaraba» sus estados al mismo tiempo que saturaba el actuador, limitando el windup.

Una primer idea para compensar el windup en la estructura Q

es incluir la saturación en el lazo con el **modelo de la planta**, como se muestra en la Figura 6.

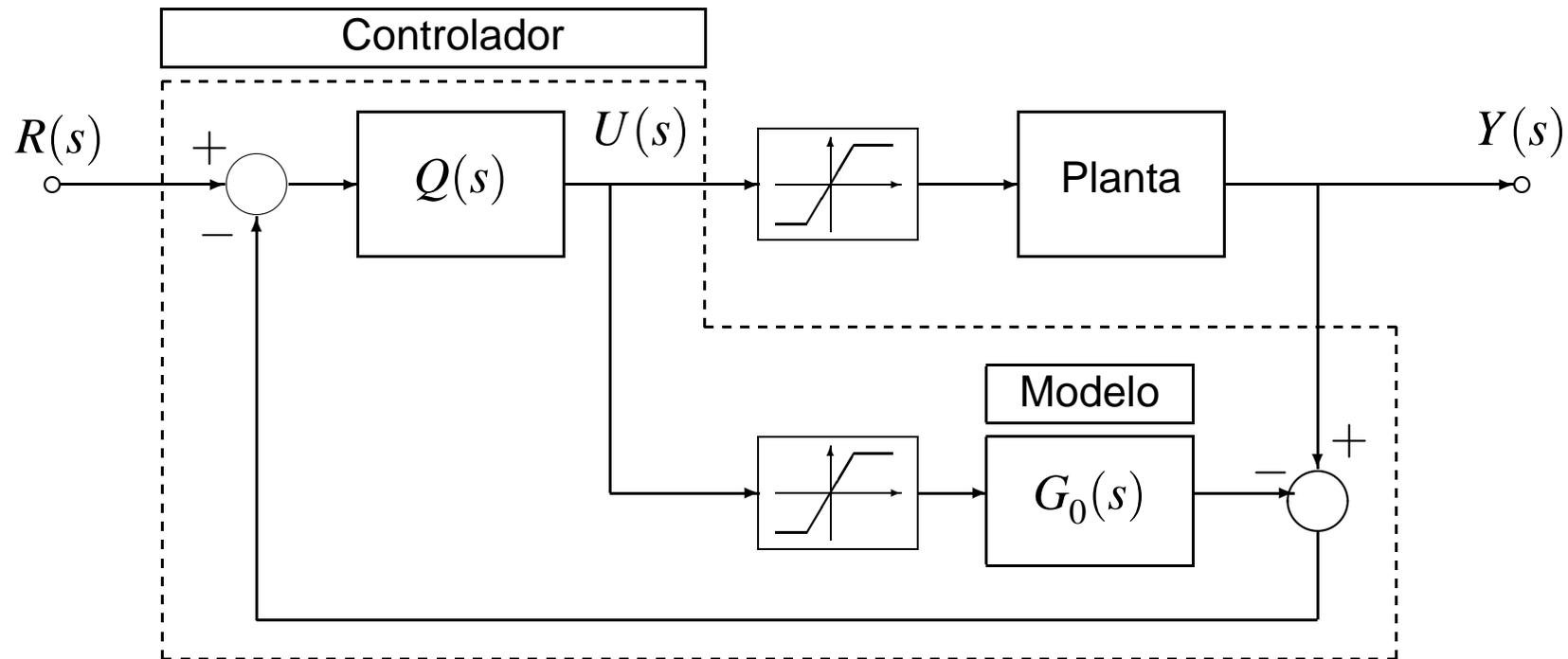


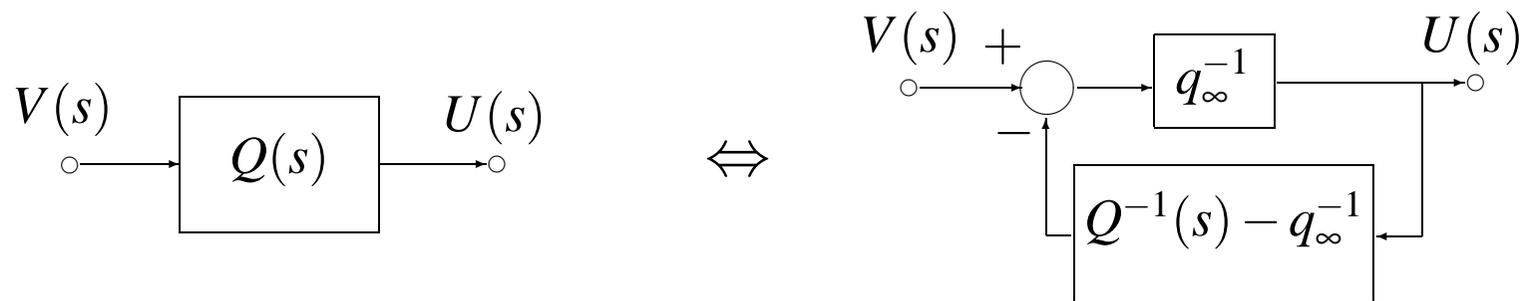
Figura 6: Primer idea antiwindup en estructura Q

Sin embargo, este lazo no es el único punto del controlador donde existe un modelo de la planta: no olvidemos que $Q(s)$

incluye un modelo de la inversa de $G_0(s)$,

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s).$$

Utilizamos **inversión por realimentación** para dejar explícito este modelo «oculto» en la estructura de Q . Sea $Q(s)$ bipropia, y sea $q_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s)$. Entonces, $Q(s)$ puede realizarse en realimentación con el diagrama de bloques de la derecha.



Es fácil verificar que ambos diagramas de bloques son equivalentes. Con esta estructura como base, sólo debemos incluir la limitación en el lazo directo de la implementación en realimentación de $Q(s)$.

El esquema completo con compensación antiwindup se muestra en la Figura 7. Si hubiera además limitación de velocidad, *slew-rate*, puede compensarse de igual forma utilizando los modelos propuestos en el Capítulo 9.

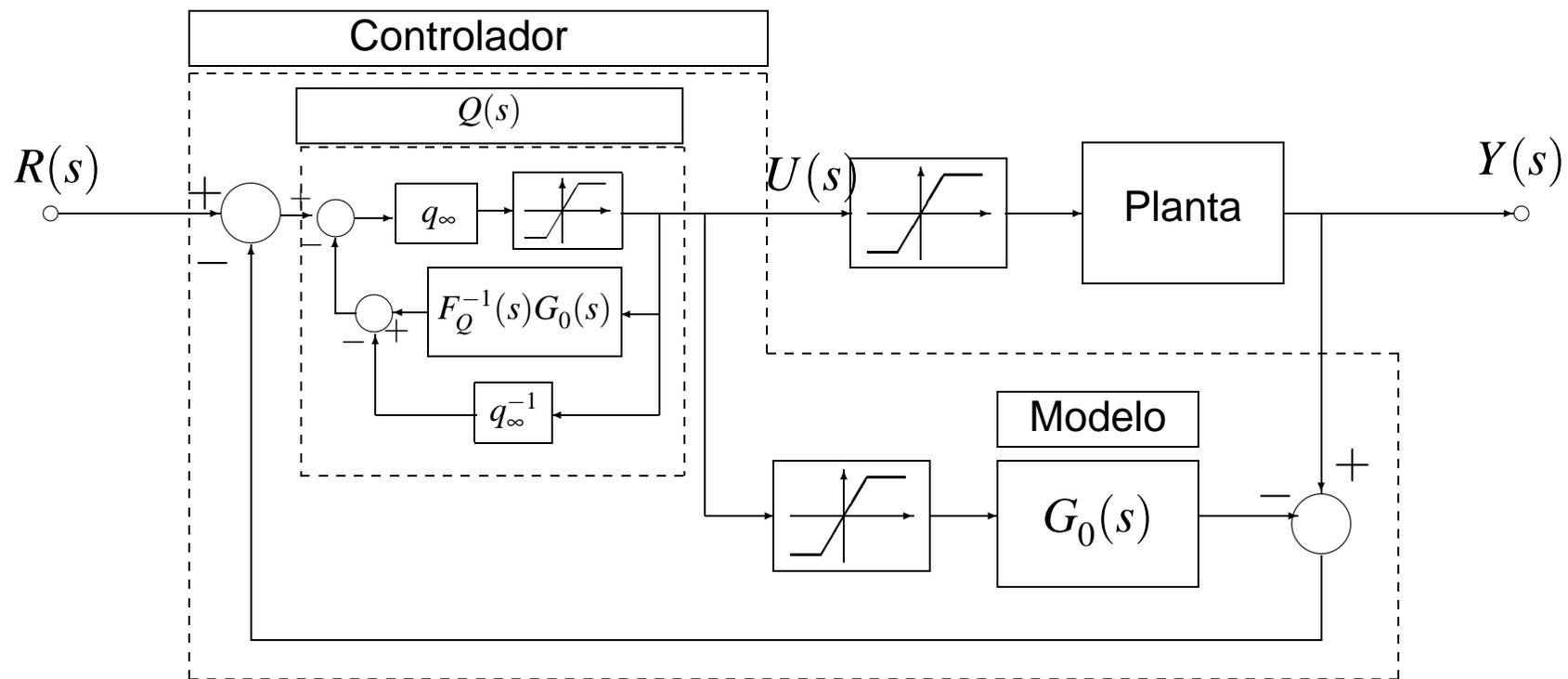


Figura 7: Esquema antiwindup en estructura Q