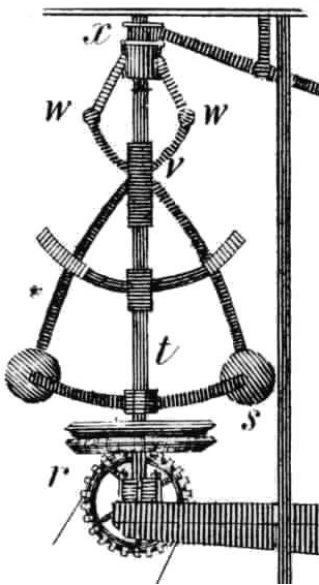


# Compromisos de Diseño en Respuesta Temporal

---

*Julio Braslavsky*



Regulador centrífugo de Watt

Control Automático 1  
<http://iaci.unq.edu.ar/caut1>  
Automatización y Control Industrial  
Universidad Nacional de Quilmes  
Mayo 2002

# 1. Introducción

Estas notas discuten compromisos de diseño que existen en la respuesta temporal transitoria a una entrada escalón de un sistema de control SISO. Estos compromisos de diseño se originan en limitaciones estructurales de la planta a controlar impuestas por polos inestables y ceros de fase no mínima de su función transferencia.

La especificación de desempeño deseado sobre la respuesta temporal del sistema es usual en la práctica. Además, en muchos casos es más directa, para lo que se pretende del sistema, que la alternativa de especificar desempeño sobre la respuesta en frecuencia del sistema, por ejemplo, mediante las funciones de sensibilidad nominales  $T_0(s)$  y  $S_0(s)$ . En contrapartida, es más difícil traducir una especificación temporal a condiciones para las funciones transferencia del lazo cerrado, que son las que en última instancia se usan para el diseño.

La Sección 2 introduce los parámetros típicos que caracterizan la respuesta transitoria de un sistema SISO estable y permiten especificar el desempeño deseado del sistema. Una vez especificado un desempeño aceptable de esta forma, se puede buscar una configuración prototipo de polos a lazo cerrado que produzcan una respuesta dentro de la especificación. Una vez determinada la configuración de polos deseada puede entonces pasarse a la etapa de síntesis del controlador, por ejemplo, mediante el método de asignación de polos basado en la solución de la ecuación diofantina.

Luego, en la Sección 3 se presenta un análisis de las limitaciones de desempeño en la respuesta transitoria inducidas por la presencia de polos inestables y ceros de fase no mínima de la planta. Estas limitaciones son estructurales e inevitables para cualquier controlador que alcance estabilidad BIBO del lazo. Por ejemplo, como se verá, los polos inestables a lazo abierto implican la existencia de sobrevalor en la respuesta, e inducen un compromiso de diseño entre la magnitud de este sobrevalor y el tiempo de crecimiento de la respuesta. Por otro lado, los ceros de fase no mínima implican la existencia de subvalor, induciendo un compromiso entre la magnitud de éste y el máximo tiempo de establecimiento de la respuesta.

El contenido de estas notas se basa fundamentalmente en resultados publicados originalmente en Middleton [1991].

## 2. Especificaciones de diseño en la respuesta temporal

La Figura 1 ilustra una respuesta genérica de un sistema estable a un escalón de referencia. Idealmente, para un sistema en el que la salida debe seguir a la entrada, esta respuesta debería aproximarse a un escalón. Sin embargo, como veremos en la Sección 3 existen limitaciones estructurales de diseño que hacen que la respuesta real alcanzable difiera de la ideal. La especificación de una respuesta transitoria deseada consiste entonces en definir cotas máximas de ciertos parámetros típicos que caracterizan la respuesta al escalón, a saber,

- el sobrevalor  $y_{sob}$ ,
- el subvalor  $y_{sub}$ ,
- el tiempo de crecimiento  $t_c$ , y
- el tiempo de establecimiento  $t_e$ ,

indicados en la Figura 1.

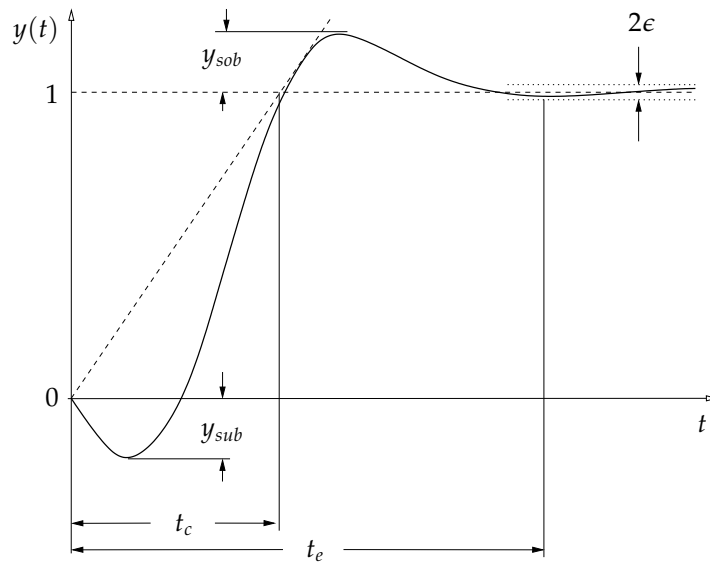


Figura 1: Especificaciones en la respuesta temporal

Existen distintas definiciones para estos parámetros en la literatura, (ver por ejemplo Ogata [1980, pp. 250-258], Franklin et al. [1991, §2.7.4]). Para nuestros fines adoptamos listadas a continuación, en base al lazo de control como el de la Figura 2, donde el *error de seguimiento* es  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Asumimos que el sistema no tiene error estático en régimen permanente, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  y, sin pérdida de generalidad, asumimos también que la excitación es un escalón unitario en la referencia  $r(t)$ , con lo que la salida  $y(t)$  deberá tender a 1 en régimen permanente.

**Sobrevalor:** es el máximo valor en que la respuesta del sistema excede su valor de régimen permanente,

$$y_{sob} \triangleq \max_t \{-e(t)\}.$$

**Subvalor:** es máximo pico negativo de la salida del sistema,

$$y_{sub} \triangleq \max_t \{-y(t)\}.$$

**Tiempo de crecimiento:** cuantifica aproximadamente el tiempo mínimo que toma la salida en alcanzar el nuevo punto de operación,

$$t_c \triangleq \max_{\delta} \{\delta : y(t) \leq t/\delta \text{ para todo } t \text{ en el intervalo } [0, \delta]\}$$

**Tiempo de establecimiento:** cuantifica el tiempo que tardan los transitorios en decaer permanentemente por debajo de un determinado nivel  $\varepsilon$ , usualmente entre el 1 y 10% del valor de régimen permanente,

$$t_e \triangleq \min_{\delta} \{\delta : |e(t)| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \text{ en el intervalo } [\delta, \infty)\}$$

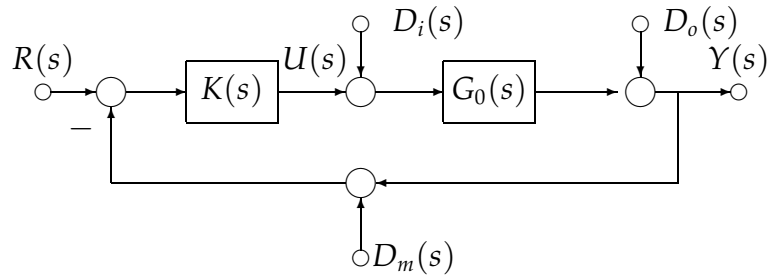


Figura 2: Lazo de control de un grado de libertad.

### 3. Limitaciones en la respuesta al escalón

#### 3.1. Efecto de polos inestables y ceros de fase no mínima de la planta en las funciones de sensibilidad

Los polos inestables y ceros de fase no mínima imponen restricciones en las funciones de sensibilidad del sistema, no importa cual sea el controlador usado. Estas restricciones son *valores fijos* que las funciones de sensibilidad deben tener en todos los puntos del semiplano derecho complejo donde la planta tiene polos o ceros.

Específicamente, si la planta tiene un polo en  $s = p$ ,  $\text{Re } p > 0$ , es decir, si  $\lim_{s \rightarrow p} G_0(s) = \infty$ , entonces para todo controlador que alcance la estabilidad interna del lazo nominal las funciones de sensibilidad deben satisfacer las siguientes restricciones,

$$T_0(p) = 1, \quad S_0(p) = 0. \quad (1)$$

Por otra parte, si la planta tiene un cero en  $s = q$ ,  $\text{Re } q > 0$ , es decir, si  $\lim_{s \rightarrow q} G_0(s) = 0$ , entonces para todo controlador que alcance la estabilidad interna del lazo nominal las funciones de sensibilidad deben satisfacer

$$T_0(q) = 0, \quad S_0(q) = 1. \quad (2)$$

Veremos ahora cómo estas restricciones de interpolación se traducen en restricciones en el desempeño alcanzable en la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado.

Usaremos el siguiente resultado preliminar, que surge de la definición de transformada Laplace.

**Lema 1.** Sea  $H(s)$  una función transferencia estrictamente propia cuyos polos se encuentran en el semiplano  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \leq -\alpha\}$ , para algún número real finito  $\alpha > 0$ . Sea  $h(t)$  la antitransformada Laplace de  $H(s)$ . Entonces para cualquier número  $s_0 \in \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > -\alpha\}$

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} h(t) dt = \lim_{s \rightarrow s_0} H(s).$$

*Demostración.* De la definición de la Transformada de Laplace, para todo  $s$  en la *región de convergencia de la transformada*,  $\text{Re } s > -\alpha$ , se cumple que

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt.$$

Como  $s_0$  está en la región de convergencia, queda probado el resultado.  $\square$

El error de seguimiento al escalón en el sistema de la Figura 2 satisface la siguiente condición integral para cualquier controlador que estabilice el lazo.

**Teorema 1 (Condición integral sobre el error debida a polos inestables).** Supongamos que el sistema a lazo abierto  $L(s)$  tiene un polo en  $p$ , con  $\text{Re } p > 0$ . Entonces si el lazo cerrado es internamente estable

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt = 0 \quad (3)$$

$$(4)$$

*Demostración.* Al ser el sistema internamente estable,  $S_0(s)$  es BIBO, y entonces el error  $e(t)$  producido por una entrada acotada es acotado, es decir,  $|e(t)| \leq M, \forall t$ . Por lo tanto, la transformada de Laplace del error,  $E(s)$  no puede tener singularidades en  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 0\}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} |E(s)| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-st} e(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-\text{Re } st} dt = \frac{M}{\text{Re } s} < \infty \quad \text{para todo } s : \text{Re } s > 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 1, la ecuación (3) sigue de

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt = E(p) = \frac{S_0(p)}{p} = 0,$$

donde usamos la relación  $E(s) = S_0(s)R(s)$ , el hecho de que la referencia es un escalón,  $R(s) = 1/s$ , y la restricción de interpolación de  $S_0(s)$  en los polos inestables de  $L(s)$ .  $\square$

Un resultado dual existe para la salida en plantas con ceros de fase no mínima.

**Teorema 2 (Condición integral sobre la salida debida a ceros de fase no mínima).** Supongamos que el sistema a lazo abierto  $L(s)$  tiene un cero en  $q$ , con  $\text{Re } q > 0$ . Entonces si el lazo cerrado es estable

$$\int_0^{\infty} e^{-qt} y(t) dt = 0. \quad (5)$$

*Demostración.* Ejercicio.  $\square$

### 3.2. Compromisos de diseño

Los teoremas presentados en la sección anterior muestran que si la planta tiene ceros o polos en el semiplano derecho del plano complejo, entonces el error y la salida a una entrada escalón deben satisfacer relaciones integrales *independientemente* del controlador usado para estabilizar el sistema. Damos ahora interpretaciones de diseño de estas integrales en términos de los parámetros de la respuesta al escalón.

**Corolario 1 (Polos inestables reales y sobrevalor).** Si la planta tiene un polo inestable real en  $p > 0$ , su respuesta al escalón tiene forzosamente sobrevalor. Más aún, si  $t_c$  es el tiempo de crecimiento del sistema a lazo cerrado, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} y_{sob} &\geq \frac{(pt_c - 1)e^{pt_c} + 1}{pt_c} \\ &\geq \frac{pt_c}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

*Demostración.* Necesariamente el error deberá cambiar de signo para que la integral (3) sea nula — a menos que sea idénticamente nulo. Así, la salida deberá superar a la referencia en algún momento  $\Leftrightarrow \exists$  sobrevalor.

De la definición de  $t_c$  tenemos que  $y(t) \leq t/t_c$  para  $t \leq t_c$ , o sea que  $e(t) \geq 1 - t/t_c$ . Usando esta cota en la integral (3) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_c} e^{-pt} e(t) dt + \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} e(t) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt + \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} e(t) dt \\ &\Leftrightarrow \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} (-e(t)) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

De (7) y la definición de sobrevalor tenemos que

$$\begin{aligned} y_{sob} \frac{e^{-pt_c}}{p} &= y_{sob} \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} dt \geq \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} (-e(t)) dt \\ &\geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt = \frac{(pt_c - 1) + e^{-pt_c}}{p^2 t_c}, \end{aligned}$$

de donde surge (6). □

Sigue del Corolario 1 que si la planta tiene un polo inestable:

- necesariamente hay sobrevalor en la respuesta al escalón
- el sobrevalor será mayor cuanto mayor sea el tiempo de respuesta del lazo cerrado.

Los polos inestables demandarán acción de control rápida para un mejor desempeño (menor sobrevalor). Cuanto mayores (más rápidos) sean los polos inestables, mayor será esta demanda.

**Ejemplo 1.** Supongamos que nuestra planta a lazo abierto tiene un polo en  $p = 2$ . Entonces tenemos que la cota en sobrevalor en la respuesta al escalón del lazo cerrado (estable) es

$$y_{sob} \geq t_c.$$

Si diseñamos el controlador para obtener un tiempo de crecimiento  $t_r = 1s$ , el sobrevalor será mayor al 100%! Para una respuesta razonable deberíamos elegir al menos  $t_c \leq 0,2s$ .

**Corolario 2 (Ceros de fase no mínima y subvalor).** Si la planta tiene un cero de fase no mínima real en  $q > 0$ , su respuesta al escalón tiene forzosamente subvalor. Más aún, si  $t_e$  es el tiempo de establecimiento a un nivel  $\varepsilon$  del sistema a lazo cerrado, entonces se cumple que

$$y_{sub} \geq \frac{1 - \varepsilon}{e^{qt_e} - 1}.$$

*Demostración.* Similar a la del Corolario 1. Ejercicio. □

La interpretación del Corolario 2 es que si la planta tiene un cero real de fase no mínima,

- necesariamente hay subvalor en la respuesta al escalón
- el pico del subvalor será mayor cuanto menor sea el tiempo de establecimiento del lazo cerrado.

Los ceros de fase no mínima demandarán acción de control lenta para un mejor desempeño (menor subvalor). Cuanto menores (más lentos) sean los ceros de fase no mínima, mayor será esta demanda.

En conclusión podemos extraer las siguientes reglas prácticas de diseño básicas para evitar sobrevalor o subvalor excesivos:

1. El polo dominante a lazo cerrado debe ser mayor (en magnitud) que cualquier polo inestable a lazo abierto del sistema.
2. El polo dominante a lazo cerrado debe ser menor (en magnitud) que el menor cero de fase no mínima del sistema.

Vemos que entre las plantas inestables y no mínima fase, aquellas que posean polos a lazo abierto a la derecha de sus ceros en  $\mathbb{C}^+$  serán más “difíciles”, ya que no podremos satisfacer ambas reglas simultáneamente, y habrá un compromiso inevitable entre reducir sobrevalor o subvalor.

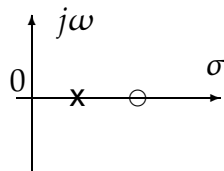


Figura 3: Caso manejable

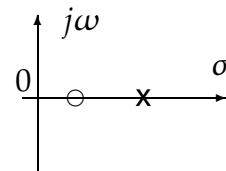


Figura 4: Caso difícil

**Ejemplo 2.** Consideremos el sistema de péndulo invertido de la Figura 5. El modelo linealizado alrededor del origen de este sistema tiene la siguiente función transferencia entre la fuerza  $u$  y la posición del carro  $y$ :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s - q)(s + q)}{Ms^2(s - p)(s + p)}$$

donde  $q = \sqrt{g/\ell}$  y  $p = q\sqrt{1 + m/M}$ . Vemos que el sistema satisface las condiciones del corolario anterior. Si normalizamos para que  $q = 1$  y consideramos  $m = M$ , obtenemos que  $p = \sqrt{2}$ . Entonces el corolario anterior predice un subvalor superior a 2 en la respuesta al escalón! La Figura 6 muestra los resultados de simulaciones del lazo cerrado controlado con distintas velocidades de respuesta.

Vemos que el subvalor es en todos los casos mucho mayor que la cota inferior de 2.

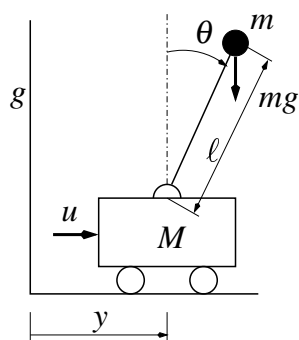


Figura 5: Péndulo invertido

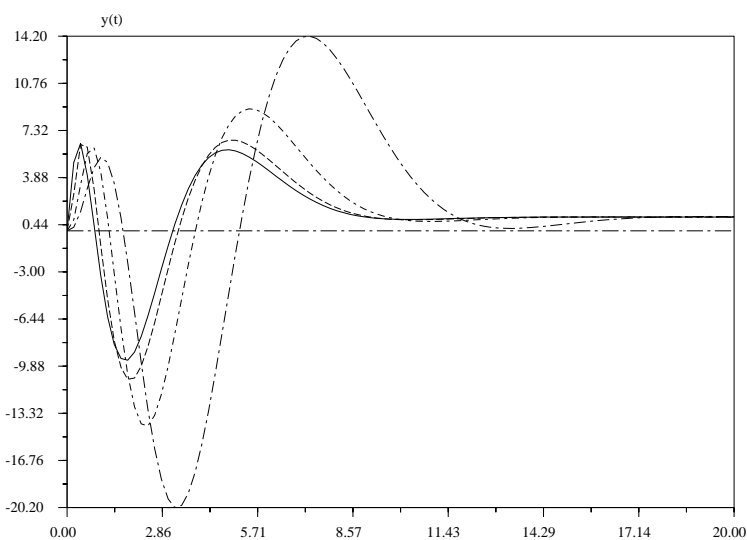


Figura 6: Respuesta a lazo cerrado del sistema de péndulo invertido

## 4. Conclusiones

Hemos estudiado el efecto sobre la respuesta al escalón a lazo cerrado de polos y ceros en  $\mathbb{C}^+$  de la planta en lazo abierto. Hemos mostrado que un lazo de realimentación unitaria necesariamente producirá sobrevalor en su respuesta al escalón si la planta a lazo abierto tiene polos reales inestables. Por otro lado, una planta con ceros reales de fase no mínima necesariamente presentará subvalor en su respuesta a lazo cerrado al escalón. Obviamente, estas limitaciones serán peores en plantas que presenten tanto polos inestables como ceros de fase no mínima a lazo abierto, como ilustramos mediante un ejemplo de control de un péndulo invertido.

## Referencias

- G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Control de sistemas dinámicos con realimentación*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- R.H. Middleton. Trade-offs in linear control systems design. *Automatica*, 27(2):281–292, March 1991.
- K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Internacional, 1980.