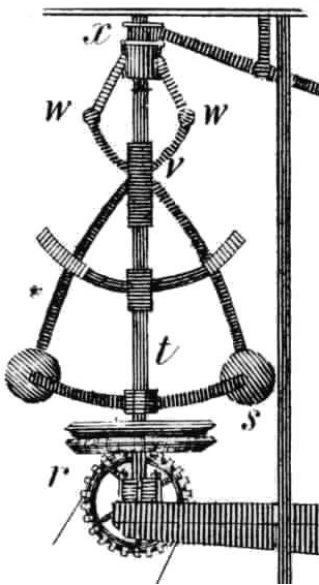


# Repaso de Modelos Matemáticos de Sistemas Dinámicos

---

*Virginia Mazzone*



Regulador centrífugo de Watt

Control Automático 1  
<http://iaci.unq.edu.ar/caut1>  
Automatización y Control Industrial  
Universidad Nacional de Quilmes  
Marzo 2002

# Índice General

<b>1 Ejemplos de modelos</b>	<b>1</b>
1.1 Modelo del retardo temporal . . . . .	3
<b>2 Diagrama en bloques</b>	<b>5</b>
2.1 Función transferencia a lazo cerrado . . . . .	5
2.2 Reducción de un diagrama en bloque . . . . .	5
<b>3 Repaso de la respuesta dinámica</b>	<b>7</b>
3.1 Respuesta al impulso y al escalón de sistemas LTI . . . . .	8

## 1 Ejemplos de modelos

Los ejemplos que presentamos a continuación fueron obtenidos de los ejemplos de uno de los Tutoriales de Control de MATLAB de la Carnegie Mellon (University of Michigan). Antes de estudiar dichos modelos, repasemos las siguientes definiciones:

- Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien.
- La función transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo (LTI) se define como el cociente-entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son nulas.

*Ejemplo 1.1.* La Figura 1 muestra un carro con un péndulo invertido, impulsado por una fuerza  $F$ . Determinar las ecuaciones dinámicas del movimiento, y linealizar alrededor del ángulo del péndulo,  $\theta = 0$  (en otras palabras supongamos que el péndulo no se mueve más que algunos grados de la vertical).

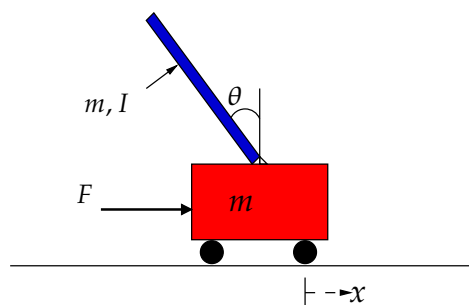


Figura 1: Péndulo invertido

Si calculamos la sumatoria de las fuerzas en el diagrama de cuerpos libres, Figura 2, del carro en la dirección horizontal, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \tag{1}$$

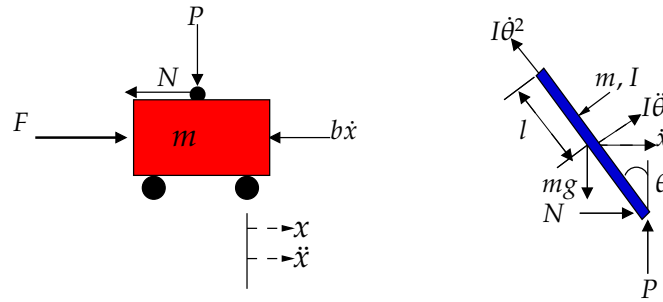


Figura 2: Diagrama de los dos cuerpos libres del sistema

Si ahora calculamos la sumatoria de las fuerzas del péndulo del diagrama de cuerpos libres en la dirección horizontal, obtenemos una ecuación para  $N$

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2)$$

Si sustituimos (2) en la ecuación (1), obtenemos la primer ecuación de este sistema

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (3)$$

Para obtener la segunda ecuación de movimiento, sumemos las fuerzas perpendiculares al péndulo. Resolviendo el sistema a lo largo de este eje obtenemos la siguiente ecuación

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta \quad (4)$$

Para deshacernos de los términos  $P$  y  $N$  de (4), sumemos los momentos alrededor del centro del péndulo para obtener

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (5)$$

Combinando (4) y (5), obtenemos la segunda ecuación dinámica

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -mlc\ddot{\theta} \quad (6)$$

Ahora linealicemos las ecuaciones (3) y (6) alrededor de  $\theta = 0$ . Si suponemos que el péndulo se mueve unos pocos grados alrededor del 0, podemos aproximar  $\cos \theta = 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$  y  $\dot{\theta}^2 \simeq 0$ . Por lo que las dos ecuaciones linealizadas son

$$-ml\ddot{x} = (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta \quad (7)$$

$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \quad (8)$$

*Ejemplo 1.2.* La figura 3 muestra dos tanques en cascada los que queremos modelar.

La altura del tanque 1,  $h_1$  la podemos describir con la ecuación

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A}(f_i - f_{12}),$$

lo mismo para  $h_2$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A}(f_{12} - f_e)$$

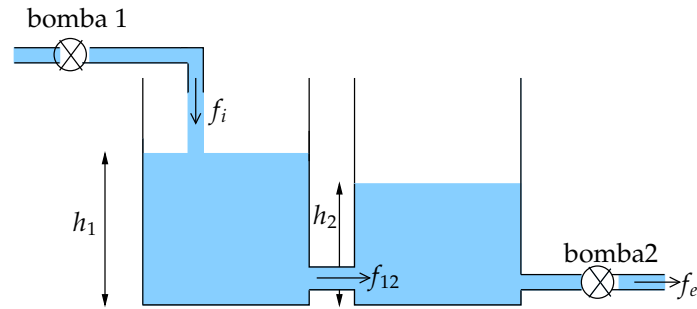


Figura 3: Diagrama de dos tachos en cascada

El caudal entre los dos tanques podemos aproximararlo por la velocidad de caída libre por la diferencia de altura entre los dos tanques.

$$f_{12} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Si medimos la altura de los tanques en % (donde 0% es vacío y 100% es lleno), podemos convertir los caudales en valores equivalentes de % por segundo (donde  $f_1$  es el caudal equivalente en el tanque 1 y  $f_2$  es el caudal de salida del tanque 2 equivalente). El modelo para este sistema es

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{h}_1 &= -K\sqrt{h_1 - h_2} + f_1 \\ \dot{h}_2 &= K\sqrt{h_1 - h_2} - f_2 \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$K = \frac{\sqrt{2g}}{A}$$

Para linealizar (9) podemos elegir una diferencia de alturas nominal del régimen permanente (o *punto de operación*). Tomemos

$$h_1 - h_2 = \Delta h = H + h_d$$

así

$$K\sqrt{h_1 - h_2} \approx K\sqrt{H}\left(1 + \frac{h_d}{2H}\right) \quad \text{ya que} \quad \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

De donde obtenemos el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{-K}{2\sqrt{H}}(h_1 - h_2) + f_1 - \frac{K\sqrt{H}}{2} \\ \dot{h}_2 &= \frac{K}{2\sqrt{H}}(h_1 - h_2) - f_2 - \frac{K\sqrt{H}}{2} \end{aligned}$$

## 1.1 Modelo del retardo temporal

Consideremos un retardo temporal puro,  $T$ , la transformada de Laplace correspondiente es  $e^{-Ts}$ . Esta transformada no podemos utilizarla como función transferencia dado que no se trata de cociente de polinomios. En esta sección buscaremos una forma de aproximarla

tal que se trate de una transferencia racional propia. Para nuestro interés, sistemas de control, la aproximación debe ser buena a bajas frecuencias,  $s = 0$ . El medio más común para hallar esta aproximación se atribuye a Padé y está basado en ajustar la expansión en serie de la función trascendental  $e^{-Ts}$  a la de una función racional, donde el grado del polinomio numerador es  $p$  y el del denominador es  $q$ . El resultado se llama *aproximación  $(p, q)$  de Padé a  $e^{-Tt}$* . Para nuestros propósitos utilizaremos solo el caso  $p = q$ .

*Ejemplo 1.3.* Para ilustrar el proceso, empecemos con la aproximación  $(1, 1)$  cuando  $T = 1$ . En este caso deseamos elegir  $b_0, b_1$  y  $a_0$  de modo que el error

$$e^{-s} - \frac{b_0s + b_1}{a_0s + 1} = \epsilon$$

sea pequeño. Para la aproximación de Padé expandimos  $e^{-s}$  y la función racional en una serie de McLaurén y ajustamos los términos. Las series son

$$e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} - \dots,$$

$$\frac{b_0s + b_1}{a_0s + 1} = b_1 + (b_0 - a_0b_1)s - a_0(b_0 - a_0b_1)s^2 + a_0^2(b_0 - a_0b_1)s^3 + \dots$$

Ajustando coeficientes, debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 &= 1, \\ b_0 - a_0b_1 &= -1, \\ -a_0(b_0 - a_0b_1) &= \frac{1}{2}, \\ -a_0^2(b_0 - a_0b_1) &= -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

Ahora observamos que tenemos un número infinito de ecuaciones pero solamente tres parámetros. La aproximación de Padé se determina cuando se ajustan los tres primeros coeficientes, con lo cual tenemos

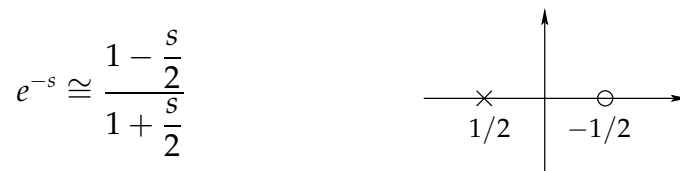


Figura 4: Aproximación de Padé

Si suponemos  $p = q = 2$ , tenemos cinco parámetros, y es posible una mejor aproximación. Para este caso tenemos

Para una aproximación general tenemos [2]: dado un retardo  $R_{pq}$  tal que

$$R_{pq}(s) = \frac{N_{pq}(s)}{D_{pq}(s)}$$

donde

$$N_{pq}(s) = \sum_{k=0}^p \frac{(p+q-k)!p!}{(p+q)!(p-k)!} s^k \quad \text{y} \quad D_{pq}(s) = \sum_{k=0}^q \frac{(p+q-k)!q!}{(p+q)!(q-k)!} (-s)^k$$

Notemos que  $R_{p0} = 1 + s + \dots + \frac{s^p}{p!}$  es el polinomio de Taylor de orden  $p$ .

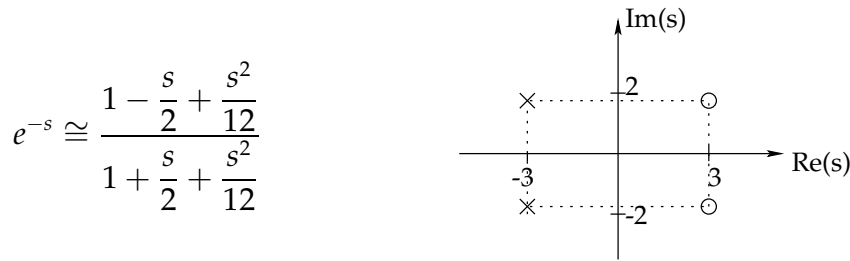
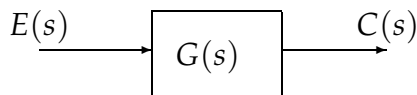


Figura 5: Aproximación de Padé

## 2 Diagrama en bloques

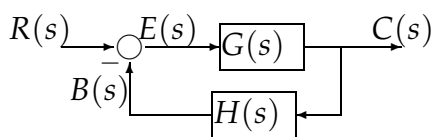
El diagrama en bloques es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tal diagrama muestra las relaciones existentes entre los diversos componentes. Un bloque es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales.



El cociente entre la salida  $C(s)$  y la señal de entrada  $E(s)$  se denomina función transferencia:  $G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$ .

### 2.1 Función transferencia a lazo cerrado

Sea el lazo de la Figura 2.1, calculemos la función de transferencia a lazo cerrado de dicho diagrama. Reemplazando (11) en (10) obtenemos que la función transferencia a lazo



$$C(s) = E(s)G(s) \tag{10}$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - C(s)H(s) \tag{11}$$

cerrado viene dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

### 2.2 Reducción de un diagrama en bloque

Un diagrama en bloque complicado que contenga muchos lazos de realimentación se simplifica mediante un reordenamiento paso a paso mediante las reglas del álgebra de los diagramas de bloques. Algunas de estas reglas importantes aparecen en la Figura 6, según [3].

Una regla extendida para la reducción de cualquier diagrama de bloques fue dada por S.J. Mason (1953-1956), quien relacionó el gráfico al álgebra matricial de las ecuaciones que

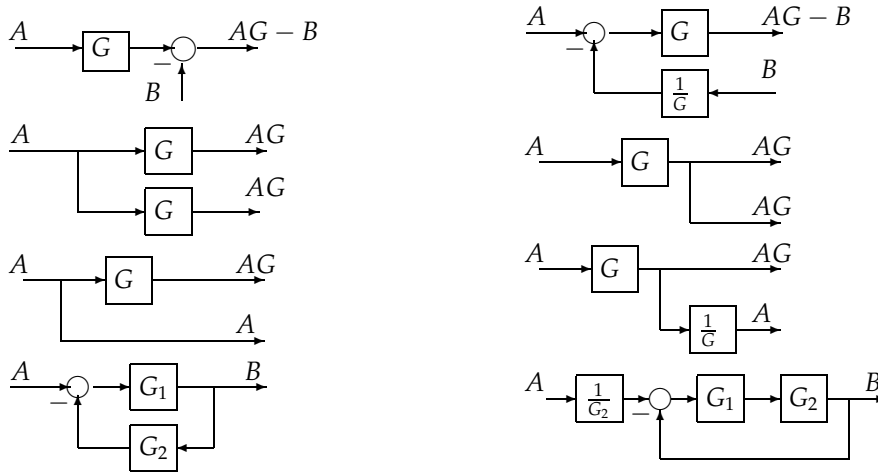


Figura 6: Reglas del álgebra de los diagramas de bloques

representan. Mason definió una trayectoria a través de un diagrama de bloques como una secuencia de componentes conectados, pasando la trayectoria desde una variable a otra sin pasar a través de ningún componente más de una vez. Definió una *ganancia de trayectoria* como el producto de las ganancias que componen la trayectoria. Una trayectoria que sale de una variable y regresa a la misma variable se define como *trayectoria de lazo*, y la ganancia de la trayectoria asociada se llama *ganancia de lazo*. La regla de Mason para el caso especial donde todas las trayectorias directas y trayectorias de lazo se tocan pueden definirse como sigue [1] :

La ganancia de un sistema realimentado está dada por la suma de las ganancias de las trayectorias directas dividida por 1 menos la suma de las ganancias de lazo.

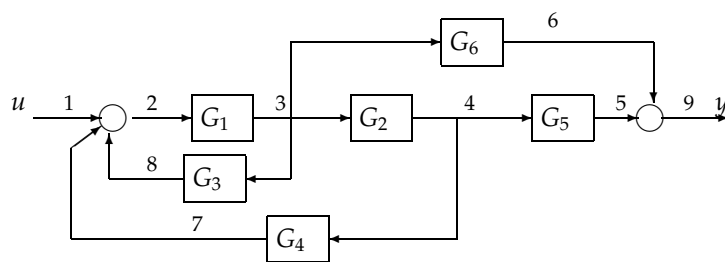


Figura 7: Un ejemplo de diagrama de bloques

*Ejemplo 2.1.* Una aplicación de esta regla se puede ilustrar con el diagrama de bloques de la Figura 7. En este caso, las trayectorias directas y sus ganancias están dadas por

Trayectorias hacia adelante	Ganancia
123459	$G_1 G_2 G_5$
12369	$G_1 G_6$

Trayectorias de lazo	Ganancia
2382	$G_1 G_3$
23472	$G_1 G_2 G_4$

y la ganancia total, o la función transferencia total, está dada por la regla en la forma

$$\frac{Y}{U} = \frac{G_1 G_2 G_5 + G_1 G_6}{1 - G_1 G_3 - G_1 G_2 G_4}$$

### 3 Repaso de la respuesta dinámica

Una vez que la función de transferencia se ha resuelto por cualquiera de los métodos, estamos en posición de empezar el análisis de la respuesta del sistema así representado. Cuando las ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas, la función transferencia que resulta será un cociente de polinomios,  $\frac{B(s)}{A(s)}$  con  $m$  el grado del polinomio  $B(s)$  y  $n$  el de  $A(s)$  para el que definiremos los siguientes términos:

- Las raíces de  $B(s) = 0$  se llaman *ceros* del sistema.
- Las raíces de  $A(s) = 0$  se llaman *polos* del sistema.
- La diferencia en los grados de  $A(s)$  y  $B(s)$  se llama *grado relativo* ( $g_r = n - m$ ).
- Si  $m < n$  decimos que el modelo es *estrictamente propio*, lo que equivale a decir grado relativo positivo.
- Si  $m = n$  decimos que el modelo es *bipropio*, lo que equivale a decir grado relativo nulo.
- Si  $m \leq n$  decimos que el modelo es *propio*.
- Si  $m > n$  decimos que el modelo es *impropio*, o que tiene grado relativo negativo.

*Nota 1.* Los sistemas reales son casi siempre estrictamente propios. Algunos métodos de diseño de controladores llevan a una función transferencia bipropia o hasta impropia. Para poder ser implementado, estos controladores son generalmente convertidos en propios, por ejemplo aumentando  $A(s)$  con un factor del tipo  $(\alpha_i s + 1)$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ .

*Nota 2.* En general los sistemas reales tienen un retardo temporal entre la entrada y la salida. La transferencia de un retardo puro es de la forma:

$$H(s) = e^{-sT_d}$$

donde  $T_d$  es el retardo (en segundos).

#### Conclusión:

La función transferencia describe las propiedades *entrada-salida* de sistemas lineales en forma algebraica.



### 3.1 Respuesta al impulso y al escalón de sistemas LTI

El estudio de la respuesta al impulso (Delta de Dirac) se debe a que la función de transferencia de un sistema continuo en el tiempo es la transformada de Laplace de su respuesta al impulso con condiciones iniciales nulas. Es muy común estudiar el comportamiento de la dinámica de los sistemas usando la respuesta al escalón, es decir  $U(s) = 1/s$ , por lo que

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

Es muy útil definir una serie de parámetros que describen algunas propiedades relevantes de la dinámica de los sistemas. Para estas definiciones, consideraremos funciones de transferencia estables teniendo como respuesta al escalón la Figura 8:

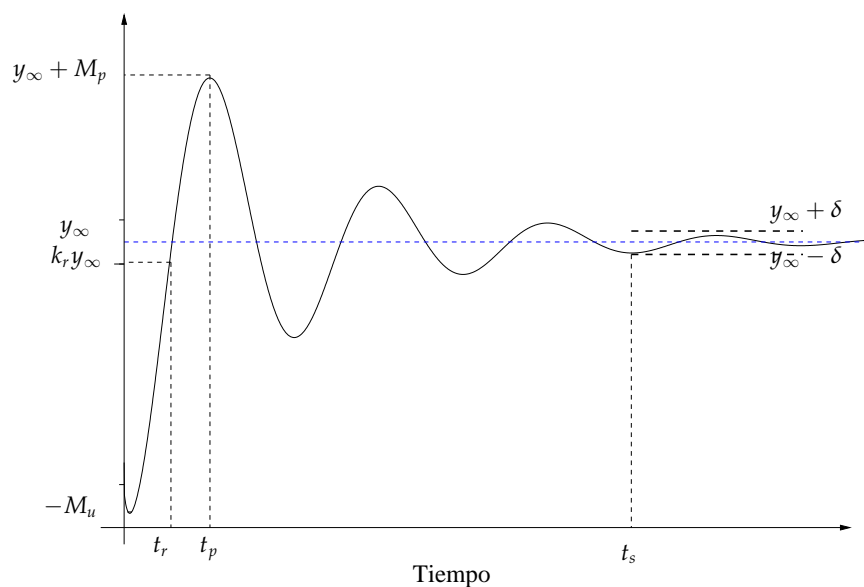


Figura 8: Indicadores de la respuesta escalón

- **valor en el régimen estacionario**,  $y_\infty$ : el valor final de la respuesta al escalón (esto no tiene sentido si el sistema tiene polos en el SPD<sup>1</sup>).
- **Tiempo de crecimiento**,  $t_r$ : el tiempo que transcurre hasta el instante en el cual la respuesta al escalón alcanza, la primera vez, el valor  $k_r y_\infty$ . La constante  $k_r$  varía según el autor, comúnmente se toma tanto 0.9 o 1.
- **Sobre error**,  $M_p$ : el máximo valor por el que la respuesta al escalón excede su valor final. Generalmente se expresa como un porcentaje de  $y_\infty$ .
- **subvalor**,  $M_u$ : el máximo (valor absoluto) por el que la respuesta al escalón pasa por debajo del cero.

<sup>1</sup>SPD: semiplano derecho

- **Tiempo de establecimiento,  $t_s$ :** el tiempo transcurrido hasta que la respuesta al escalón ingresa (sin dejarlo en tiempo subsiguiente) a una banda  $\pm\delta$ , alrededor del valor final. Esta banda  $\delta$ , generalmente se define como un porcentaje de  $y_\infty$ , 2% a 5%

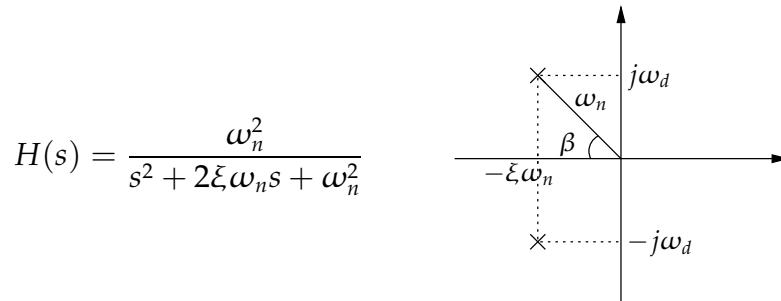


Figura 9: Función transferencia y ubicación de un par de polos complejos conjugados

Para el caso de un par de polos complejos conjugados, Figura 9, donde  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ) es conocido como el *factor de amortiguamiento* y  $\omega_n$ , como la *frecuencia natural*. Definimos también la *frecuencia natural de amortiguamiento*,  $\omega_d$  como

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Los polos complejos conjugados de este sistema,  $s_1$  y  $s_2$ , pueden expresarse la forma

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = \omega_n e^{\pm j(\pi - \beta)}$$

Las características de la respuesta al escalón unitario de este sistema nos lleva a calcular los indicadores descritos en la Figura 8:

**Tiempo de crecimiento**

Para este caso tomaremos  $k_r = 1$ , y obtenemos

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

**Sobre valor**

El máximo valor de la salida,  $M_p$  ocurre en el tiempo  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T_d}{2}$ , entonces

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

**Tiempo de establecimiento**

Para un error en el régimen estacionario de 1% tenemos que

$$e^{-\xi\omega_n t_s} = 0.01, \text{ por lo que } t_s = \frac{4.6}{\xi\omega_n}$$

## Referencias

- [1] Gene F. Franklin, J.David Powel, and Abbas Emami-Naeini. *Control de Sistemas Dinámicos con Retroalimentación*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [2] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins, 1996.
- [3] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería en Control Moderno*. Pentice Hall, 1997.