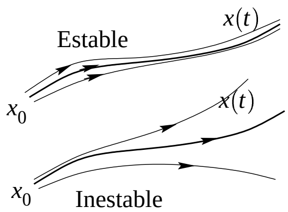
Capítulo 5

Estabilidad

5.1. Introducción

La estabilidad de un sistema puede pensarse como una continuidad en su comportamiento dinámico. Si se presenta un cambio pequeño en las entradas o condiciones iniciales, un sistema estable presentará modificaciones pequeñas en su respuesta perturbada. Por otro lado, en un sistema inestable cualquier perturbación, por pequeña que sea, llevará estados y/o salidas a crecer sin límite o hasta que el sistema se queme, se desintegre o sature. Es evidente entonces que la estabilidad es un requerimiento básico de los sistemas dinámicos destinados a realizar operaciones o procesar señales, y es lo primero que debe garantizarse en el diseño de un sistema de control.



Como la respuesta de los sistemas dinámicos lineales se descompone en la respuesta a entrada con condiciones iniciales nulas, y la respuesta a condiciones iniciales con entrada nula, podemos hablar de dos "tipos" de estabilidad:

- *Estabilidad externa*, o *entrada-salida*, que se refiere a la estabilidad del sistema con condiciones iniciales nulas. La estabilidad externa describe el efecto de perturbaciones en las entradas sobre el comportamiento dinámico de la salida del sistema.

- *Estabilidad interna*, que se refiere a la estabilidad del sistema autónomo (sin entradas). La estabilidad interna describe el efecto de perturbaciones en las condiciones iniciales sobre comportamiento dinámico de los estados del sistema.

Estudiaremos estos dos tipos de estabilidad por separado, para sistemas estacionarios primero, y luego para sistemas inestacionarios.

5.2. Estabilidad Externa de Sistemas Estacionarios

5.2.1. Representación externa

Sea un sistema lineal, causal y estacionario SISO descripto por la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau, \qquad (5.1)$$

para el cual asumimos condiciones iniciales nulas (es decir, se encuentra inicialmente *relajado*).

Vamos a estudiar la estabilidad externa del sistema (5.1) con respecto a la familia de señales de entrada *acotadas*. Una señal de entrada dada $u(t)$ se dice *acotada* si existe una constante positiva M_u tal que

$$|u(t)| \leq M_u \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Ejemplos de señales acotadas son $u(t) = \text{sen}(\omega t)$, $u(t) = t^2 e^{-2t}$, o $u(t) = -2$.

Definición 5.1 (Estabilidad entrada-acotada/salida-acotada (BIBO)). [1] Un sistema es *estable BIBO (entrada-acotada/salida-acotada)* si toda entrada acotada produce una salida acotada.

Remarcamos que la estabilidad BIBO se refiere a una propiedad del sistema que sólo considera los efectos de la entrada sobre la salida, es decir, el *comportamiento externo* del sistema, independientemente de lo que pase con los estados. El siguiente resultado establece un test para determinar si un sistema SISO es estable BIBO.

Teorema 5.1 (Estabilidad BIBO de sistemas SISO). Un sistema SISO es estable BIBO si y sólo si su respuesta al impulso $g(t)$ es *absolutamente integrable* en el intervalo $[0, \infty)$, es decir, existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau = \leq M < \infty.$$

Demostración. Supongamos que $g(t)$ es absolutamente integrable. Sea $u(t)$ una entrada arbitraria acotada, es decir, $|u(t)| \leq M_u$ para todo $t \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t |g(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \\
&\leq M_u \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \\
&\leq M_u M, \quad \Rightarrow \text{el sistema es BIBO.}
\end{aligned}$$

Nos queda probar que "estabilidad BIBO" $\Rightarrow$ "$g(t)$ es absolutamente integrable". Probamos en cambio la implicación equivalente "$g(t)$ *no* es absolutamente integrable" $\Rightarrow$ "no hay estabilidad BIBO". Supongamos entonces que $g(t)$ *no* es absolutamente integrable, es decir que existe algún t_1 tal que

$$\int_0^{t_1} |g(\tau)|d\tau = \infty.$$

[1] Bounded Input Bounded Output.

Consideremos la entrada acotada

$$u(t_1 - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\tau) \geq 0 \\ -1 & \text{si } g(\tau) < 0. \end{cases}$$

La salida del sistema para esta entrada y $t = t_1$ es

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_0^{t_1} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_1} |g(\tau)|d\tau = \infty, \end{aligned}$$

Encontramos entonces una entrada acotada que produce una salida no acotada, por lo que el sistema *no* es estable BIBO si $g(t)$ no es absolutamente integrable. Este paso concluye la prueba del teorema. □

Notar que una función absolutamente integrable no necesariamente es acotada y puede no ir a cero cuando $t \to \infty$. Un ejemplo de una función que es absolutamente integrable y no va a cero cuando $t \to \infty$ es (Figura 5.1)

$$f(t-n) = \begin{cases} n + (t-n)n^4 & \text{para } n - 1/n^3 < t \leq n \\ n - (t-n)n^4 & \text{para } n < t \leq n + 1/n^3. \end{cases} \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

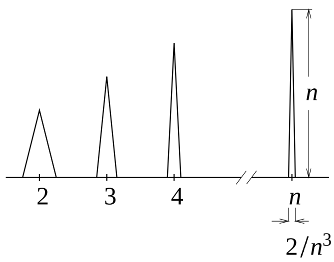


Figura 5.1: Función absolutamente integrable que no tiende a 0.

La estabilidad BIBO es la base del clásico concepto de *respuesta en régimen permanente* de un sistema lineal estacionario. Esta es la respuesta del sistema una vez extinguidos los transitorios originados en el momento que se aplica la señal de entrada.

Teorema 5.2 (Estabilidad BIBO y respuesta en régimen permanente). Si un sistema con respuesta al impulso $g(t)$ es estable BIBO, entonces cuando $t \to \infty$

1. La salida correspondiente a una entrada constante $u(t) = a$, para $t \geq 0$, tiende a la constante
$$y_{rp}(t) = \hat{g}(0)a.$$
2. La salida correspondiente a una entrada sinusoidal $u(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t$, para $t \geq 0$, tiende a la sinusoide
$$y_{rp}(t) = |\hat{g}(j\omega_0)| \operatorname{sen}(\omega_0 t + \sphericalangle \hat{g}(j\omega_0)).$$

Demostración.

1. Si $u(t) = a$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = a\int_0^t g(\tau)d\tau$$

y así

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = a\int_0^\infty g(\tau)d\tau = a\int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\Big|_{s=0} = a\hat{g}(0),$$

2. Si $u(t) = \operatorname{sen}\omega_0 t$, para $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau)\operatorname{sen}\omega_0(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)\left[\operatorname{sen}\omega_0 t\cos\omega_0\tau - \operatorname{sen}\omega_0\tau\cos\omega_0 t\right]d\tau \\ &= \operatorname{sen}\omega_0 t\int_0^t g(\tau)\cos\omega_0\tau d\tau - \cos\omega_0 t\int_0^t g(\tau)\operatorname{sen}\omega_0\tau d\tau. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si $g(t)$ es absolutamente integrable, entonces podemos evaluar

$$\begin{aligned} \hat{g}(j\omega) &= \int_0^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \underbrace{\int_0^\infty g(\tau)\cos\omega\tau d\tau}_{\operatorname{Re}\hat{g}(j\omega)} - j\underbrace{\int_0^\infty g(\tau)\operatorname{sen}\omega\tau d\tau}_{-\operatorname{Im}\hat{g}(j\omega)} \\ &= |\hat{g}(j\omega)|e^{-j\sphericalangle\hat{g}(j\omega)} \\ &= |\hat{g}(j\omega)|\cos\sphericalangle\hat{g}(j\omega) - j|\hat{g}(j\omega)|\operatorname{sen}\sphericalangle\hat{g}(j\omega). \end{aligned}$$

Finalmente de (5.2), cuando $t \to \infty$

$$\begin{aligned} y(t) \to{} & \operatorname{sen}\omega_0 t\int_0^\infty g(\tau)\cos\omega_0\tau d\tau - \cos\omega_0 t\int_0^\infty g(\tau)\operatorname{sen}\omega_0\tau d\tau \\ &= \operatorname{sen}\omega_0 t\operatorname{Re}\hat{g}(j\omega_0) + \cos\omega_0 t\operatorname{Im}\hat{g}(j\omega_0) \\ &= |\hat{g}(j\omega_0)|\left[\operatorname{sen}\omega_0 t\cos\sphericalangle\hat{g}(j\omega_0) + \cos\omega_0 t\operatorname{sen}\sphericalangle\hat{g}(j\omega_0)\right] \\ &= |\hat{g}(j\omega_0)|\operatorname{sen}(\omega_0 t + \sphericalangle\hat{g}(j\omega_0)). \end{aligned}$$

□

El teorema anterior especifica la respuesta de un sistema BIBO a señales constantes y sinusoidales una vez que los transitorios se extinguen. Este resultado es la base del filtrado de señales.

El test de estabilidad BIBO del Teorema 5.1 sirve para una clase general de sistemas lineales estacionarios. Sin embargo, para utilizarlo necesitamos disponer de la respuesta al impulso del sistema para poder evaluar si es absolutamente integrable. Este puede no ser un test fácil de realizar. Si el sistema es además causal y de dimensión finita, existe un test que puede resultar mucho más aplicable.

Corolario 5.1 (Estabilidad BIBO para funciones racionales y propias). Un sistema SISO con una función transferencia racional y propia $\hat{g}(s)$ es BIBO estable si y sólo si todos los polos de $\hat{g}(s)$ tienen parte real negativa.

Demostración. Si $\hat{g}(s)$ tiene un polo en p con multiplicidad m, es claro que su expansión en fracciones simples incluirá los términos

$$\frac{1}{s-p}, \frac{1}{(s-p)^2}, \dots, \frac{1}{(s-p)^m}$$

La transformada de Laplace inversa de $\hat{g}(s)$ — la respuesta al impulso del sistema relajado — incluirá entonces combinaciones lineales de las exponenciales

$$e^{pt}, te^{pt}, t^2e^{pt}, \dots, t^{m-1}e^{pt}.$$

Es fácil chequear que todos estos términos serán absolutamente integrables si y sólo si p pertenece al semiplano (abierto, sin incluir al eje $j\omega$) izquierdo del plano complejo, lo que, usando el Teorema 5.1, concluye la prueba del corolario. □

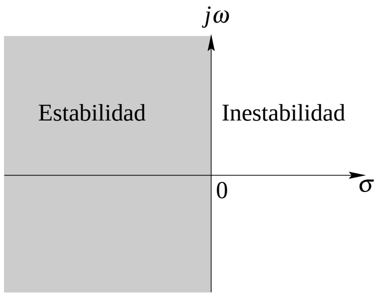


Figura 5.2: Región de estabilidad externa para polos de sistemas continuos

Este corolario da el resultado de estabilidad de sistemas lineales que se ve en teoría de control clásico (Control Automático 1); la estabilidad del sistema queda determinada por los polos de la función transferencia, siendo la región de estabilidad el semiplano izquierdo (abierto) del plano complejo (Figura 5.2). Como vemos ahora, este tipo de estabilidad sólo tiene en cuenta el comportamiento externo del sistema, ignorando el efecto de condiciones iniciales, que se asumen nulas. El resultado más general, del Teorema 5.1, nos permite analizar sistemas que no necesariamente van a tener una función transferencia racional y propia, como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1. Sea el sistema en realimentación positiva de la Figura 5.3 que incluye un retardo unitario, $T = 1$, y una ganancia estática de valor a. El sistema es de dimensión infinita, puesto que incluye un retardo, y no tiene función transferencia racional. Cuando la entrada es un impulso, $u(t) = \delta(t)$, la salida está dada por

$$g(t) = a\delta(t-1) + a^2\delta(t-2) + a^3\delta(t-3) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a^i\delta(t-i).$$

Podemos considerar los impulsos como positivos, con lo que $|g(t)| = \sum_{i=1}^{\infty} |a|^i\delta(t-i)$, y así

$$\int_0^{\infty} |g(t)|dt = \sum_{i=1}^{\infty} |a|^i = \begin{cases} \infty & \text{si } |a| \geq 1 \\ \frac{|a|}{1-|a|} < \infty & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Concluimos que el sistema es BIBO estable si y sólo si $|a| < 1$.

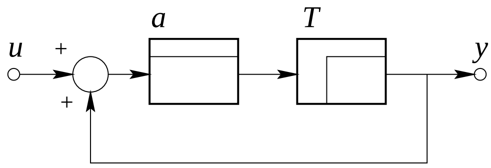


Figura 5.3: Sistema realimentado con retardo.

5.2.2. Caso MIMO

Los resultados de estabilidad BIBO para sistemas MIMO siguen de los de sistemas SISO, ya que una matriz transferencia sera BIBO estable si y sólo si cada una de sus entradas son BIBO estables. Los tests del Teorema 5.1 y el Corolario 5.1 se extienden así de forma inmediata al caso MIMO; deben realizarse sobre cada elemento de la respuesta al impulso o matriz transferencia del sistema.

5.2.3. Representación interna

En el caso causal y de dimensión finita sabemos que disponemos también de la representación en ecuaciones de estado del sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

En términos de esta representación interna, la estabilidad BIBO dependerá de los autovalores de la matriz A, ya que todo polo de $\hat{G}(s)$ es necesariamente un autovalor de A, dado que

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D\\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A)B + D.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, todos los polos de $\hat{G}(s)$ tendrán parte real negativa, y el sistema será estable BIBO.

No obstante, *no todo autovalor de A es un polo de $\hat{G}(s)$*, ya que pueden producirse cancelaciones entre ceros y polos al computar $\hat{G}(s)$. Así, un sistema puede ser estable BIBO aunque algunos autovalores de A no tengan parte real negativa, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2. El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) - 2u(t),\end{aligned}$$

a pesar de tener un autovalor con parte real positiva en $\lambda = 1$, es estable BIBO, dado que su función transferencia

$$\hat{g}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{2(1-s)}{(s+1)},$$

tiene un único polo en $s = -1$.

5.2.4. Caso discreto

El caso discreto es análogo al caso continuo, *mutatis mutandis*, con el sistema descripto por

$$y[k] = \sum_{m=0}^{\infty} g[k-m]u[m] = \sum_{m=0}^{\infty} g[m]u[k-m],$$

donde $g[k]$ es la secuencia respuesta a un impulso discreto aplicado en el instante $k = 0$. Resumimos los resultados principales en los siguientes teoremas.

Teorema 5.3 (Estabilidad BIBO discreta). Un sistema discreto MIMO con matriz respuesta al impulso $G[k] = \big[g_{ij}[k]\big]$ es estable BIBO si y sólo si cada $g_{ij}[k]$ es absolutamente sumable, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| \leq M < \infty.$$

Notar que en el caso de tiempo continuo las funciones absolutamente integrables pueden no ser acotadas, o no tender a 0 cuando $t \to \infty$. En el caso de tiempo discreto, si $g[k]$ es absolutamente sumable entonces *debe necesariamente* ser acotada y aproximarse a 0 cuando $k \to \infty$.

Demostración. La prueba de este teorema es similar a la del Teorema 5.1. □

El resultado sobre la respuesta en régimen permanente de un sistema discreto es esencialmente idéntico al caso continuo.

Teorema 5.4 (Respuesta en régimen permanente discreta). Si un sistema discreto con respuesta al impulso $g[k]$ es estable BIBO, entonces, cuando $k \to \infty$,

1. La salida excitada por $u[k] = a$, para $k \geq 0$, tiende a $\hat{g}(1)a$.
2. La salida excitada por $u[k] = \operatorname{sen} \omega_o k$, para $k \geq 0$, tiende a $|\hat{g}(e^{j\omega_0})| \operatorname{sen}(\omega_0 k + \sphericalangle \hat{g}(e^{j\omega_0}))$, donde $\hat{g}(z)$ es la transformada Z de $g[k]$,

$$\hat{g}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g[m]z^{-m}.$$

El siguiente corolario da un test de estabilidad externa para sistemas discretos descriptos por matrices transferencia racionales y propias. La principal diferencia con el caso continuo es la región de estabilidad para los polos del sistema, que en el caso discreto es el interior del círculo unitario (Figura 5.4).

Corolario 5.2 (Estabilidad BIBO para funciones discretas racionales y propias). Un sistema discreto MIMO con matriz transferencia racional y propia $\hat{G}(z) = [\hat{g}_{ij}(z)]$ es estable BIBO si y sólo si todo polo de $\hat{g}_{ij}(z)$ tiene magnitud menor que 1.

Demostración. Si $\hat{G}(z)$ tiene un polo p_i con multiplicidad m_i, entonces su expansión en fracciones simples incluye los términos

$$\frac{1}{z-p_i}, \frac{1}{(z-p_i)^2}, \dots, \frac{1}{(z-p_i)^{m_i}}$$

por lo que la transformada Z inversa de $\hat{G}(z)$ da una respuesta al impulso $G[k]$ que incluirá los factores

$$p_i^k, kp_i^k, \ldots, k^{m_i-1}p_i^k.$$

No es difícil ver que cada uno de estos términos va a ser absolutamente sumable si y sólo si $|p_i| < 1$, lo que concluye la prueba. $\square$

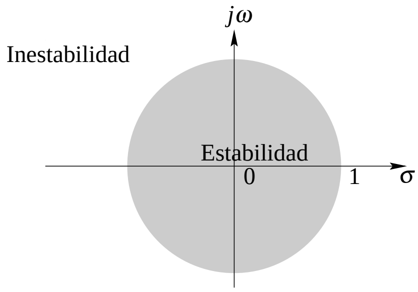


Figura 5.4: Región de estabilidad externa para polos de sistemas discretos

Ejemplo 5.3. Sea un sistema discreto estacionario con respuesta al impulso $g[k] = 1/k$, para $k \geq 1$, y $g[0] = 0$. Analizamos si $g[k]$ es absolutamente sumable,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.
\end{aligned}$$

La secuencia de la respuesta al impulso es acotada pero no sumable, por lo tanto el sistema no es BIBO.

5.3. Estabilidad Interna de Sistemas Estacionarios

La estabilidad BIBO se definió bajo condiciones iniciales nulas, y se refería al comportamiento *externo* del sistema, o sea, aquel observable en la relación entre salidas y entradas independientemente de estados del sistema. Ahora estudiamos la estabilidad *interna* del sistema, que se refiere al comportamiento de los estados del sistema. Consideramos la respuesta a condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y con entradas nulas, es decir,

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{5.3}$$

La estabilidad interna describe las propiedades de convergencia de las trayectorias a *puntos de operación* o *de equilibrio* del sistema.

Definición 5.2 (Punto de Equilibrio). Un punto de equilibrio x_e de un sistema en EE

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

es un vector constante tal que si $x(0) = x_e$, entonces $x(t) = x_e$ para todo $t \geq 0$.

La definición de punto de equilibrio vale para sistemas no lineales, que pueden tener varios. Para sistemas lineales, salvando los casos en que la matriz A tenga autovalores nulos, existe un solo punto de equilibrio: el origen.

Ejemplo 5.4. Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} x(t) \tag{5.4}$$

Este sistema tiene una matriz A con un autovalor nulo, por lo que tiene el kernel de A es no trivial. Podemos verificar que $\ker A$ está generado por el vector $x_e = [-3, 1]^T$. La dirección definida por x_e es entonces un *conjunto de equilibrios*, es decir que hay infinitos puntos de equilibrio, en particular *no aislados*. Como vemos en la Figura 5.5, cualquier condición inicial que no esté exactamente sobre la recta de equilibrios generada por el vector $[-3, 1]^T$ dará origen a una trayectoria que crecerá en forma ilimitada con t. Condiciones iniciales sobre la recta de equilibrios darán origen a trayectorias *invariantes* (el sistema no se moverá de la condición inicial).

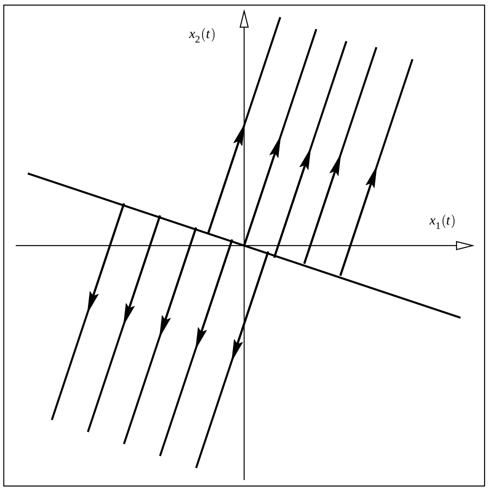


Figura 5.5: Retrato de fase del sistema (5.4)

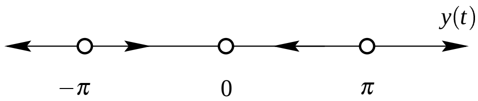


Figura 5.6: Espacio de estados (unidimensional) del sistema (5.5)

Veamos ahora el sistema discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} x[k].$$

En este sistema los equilibrios están definidos por los x tales que $x[k+1] = x[k]$, es decir, $(A - I)x_e = 0$. Como la matriz $(A - I)$ es no singular, el único equilibrio posible es el origen $x_e = [0, 0]^T$.

Por último, consideremos el sistema no lineal

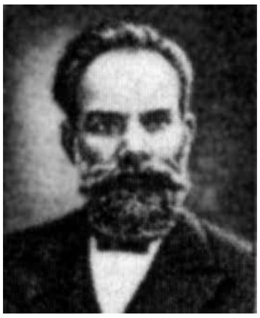
$$\dot{x}(t) = -\operatorname{sen} x(t). \tag{5.5}$$

Haciendo $\dot{x}(t) = -\operatorname{sen} x_e \equiv 0$ obtenemos $x_e = k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \ldots$. Hay infinitos puntos de equilibrio, pero en este caso son *aislados* (Figura 5.6).

Para los sistemas lineales que tratamos en esta materia interesa tener un equilibrio único y estable en el origen. Éste será un equilibrio en cualquier representación en EE equivalente del sistema.

El tipo de estabilidad interna que estudiamos en esta sección recibe el nombre del científico ruso Alexander Mikhailovich Lyapunov, que realizó estudios pioneros en el tema a fines del siglo 19. Lyapunov introdujo por primera vez métodos que permiten determinar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales sin necesidad de calcular explícitamente las soluciones.

El concepto de estabilidad introducido por Lyapunov hace hincapié en las propiedades de puntos particulares en el espacio de estados, los *puntos de equilibrio*, y se basa en una generalización matemática del concepto de "energía" de sistemas mecánicos. Los métodos de Lyapunov pueden aplicarse a sistemas no lineales e inestacionarios.

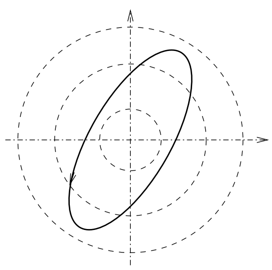


Aleksandr Lyapunov (1857-1918)

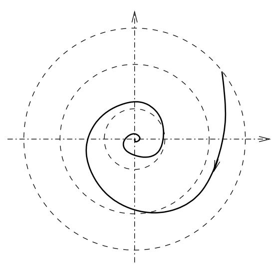
Definición 5.3 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov). El (equilibrio del) sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es *estable en el sentido de Lyapunov*, o simplemente *estable*, si toda condición inicial finita origina una trayectoria acotada.

Definición 5.4 (Estabilidad Asintótica). El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es *asintóticamente estable* si toda condición inicial finita origina una trayectoria acotada que además tiende al origen cuando $t \to \infty$.

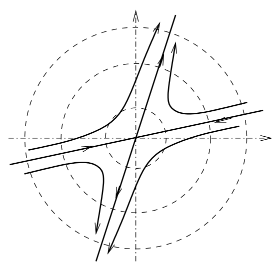
Definición 5.5 (Inestabilidad). El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es *inestable* si no es estable.



Estabilidad Lyapunov



Estabilidad asintótica



Inestabilidad

Para sistemas del tipo (5.3) la estabilidad queda determinada por los autovalores de A.

Teorema 5.5 (Estabilidad Interna). El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es

1. estable en el sentido de Lyapunov si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva, y aquellos con parte real cero están asociados a un bloque de Jordan de orden 1 de A.

2. asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.

Demostración. Notamos primero que la estabilidad de una EE no será alterada por transformaciones de equivalencia algebraica, puesto que en $\bar{x}(t) = Px(t)$, donde P es una matriz no singular, si $x(t)$ es acotado también lo será $\bar{x}(t)$. Y si $x(t)$ tiene a cero, también lo hará $\bar{x}(t)$.

En el sistema transformado es $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}x(t)$, donde $\bar{A} = PAP^{-1}$ tiene los mismos autovalores que A. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con multiplicidad r_i, $\sum_{i=1}^{m} r_i = n$.

Sea P la transformación de equivalencia que lleva el sistema a su forma canónica modal, o sea que $\bar{A}$ es diagonal en bloques,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix}$$

donde el bloque $J_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$ es el bloque de Jordan asociado al autovalor λ_i.

La solución de $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}x(t)$ es $x(t) = e^{\bar{A}t}x(0)$, donde $e^{\bar{A}t}$ también es diagonal en bloques

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{J_m t} \end{bmatrix}.$$

Como vimos, cada $e^{J_i t}$ involucra términos con las exponenciales $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}$, etc., dependiendo de la multiplicidad de λ_i. Es claro entonces que la respuesta del sistema sólo puede ser acotada si ningún autovalor tiene parte real positiva y todos los autovalores con parte real nula están asociados a bloques de Jordan de orden 1.

Para que el estado converja asintóticamente al origen, es necesario que todos los autovalores tengan parte real estrictamente negativa. □

Ejemplo 5.5. Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t).$$

Tiene un autovalor doble en 0 y uno simple en -1. Como el autovalor nulo está asociado a dos bloques de Jordan de orden 1, concluimos que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.

El sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t),$$

sin embargo, tiene los mismos autovalores, pero esta vez el autovalor nulo está asociado a un bloque de Jordan de orden 2, y por lo tanto el sistema es inestable.

5.3.1. Relaciones entre Estabilidad Externa e Interna

La relación entre estabilidad externa y estabilidad interna puede resumirse en el diagrama de la Figura 5.7.

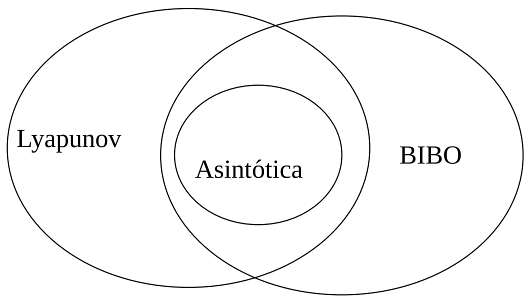


Figura 5.7: Relaciones entre estabilidad externa y estabilidad interna

Por definición, estabilidad asintótica implica estabilidad Lyapunov. Por otro lado, como todo polo de la matriz transferencia del sistema

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

debe ser un autovalor de A, estabilidad interna asintótica implica estabilidad BIBO. Sin embargo, no todo autovalor de A aparecerá como polo de $\hat{G}(s)$, ya que puede haber cancelaciones de ceros y polos. Por lo tanto, estabilidad BIBO *no implica* estabilidad interna; es decir, un sistema puede ser BIBO estable pero no Lyapunov o asintóticamente estable, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6 (Bay [1999, p.~299]). Consideremos el sistema dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = \dot{u} - u. \tag{5.6}$$

Veremos que este sistema es BIBO estable pero no asintóticamente estable. Primeramente llevamos (5.6) a una representación en espacio de estados. Asumiendo condiciones iniciales nulas (sólo para obtener la función transferencia) la transformada Laplace de (5.6) nos da

$$(s^2 + s - 2)\hat{y}(s) = (s-1)\hat{u}(s), \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \triangleq g(s) = \frac{s-1}{s^2+s-2}. \tag{5.7}$$

Realizamos ahora la función transferencia $\hat{g}(s)$ de (5.7) en la forma canónica del controlador

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Los autovalores de la matriz A de (5.8) son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Por el Teorema 5.5, el sistema no es internamente estable, ni asintóticamente, ni Lyapunov, ya que tiene un autovalor con parte real positiva.

Sin embargo, si factorizamos la función transferencia $\hat{g}(s)$ de (5.7) tenemos que

$$\hat{g}(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s+2},$$

por lo que la función transferencia no tiene ningún polo con parte real no negativa. Por el Corolario 5.1, el sistema es BIBO estable.

5.3.2. Sistemas discretos

Las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov y asintótica son las mismas para sistemas en tiempo discreto $x[k+1] = Ax[k]$. El Teorema 5.5 se reformula de la siguiente forma.

Teorema 5.6 (Estabilidad Lyapunov para sistemas discretos). El sistema $x[k+1] = Ax[k]$ es

1. estable en el sentido de Lyapunov si y sólo si todos los autovalores de A tienen magnitud no mayor que 1, y aquellos con magnitud igual a 1 están asociados a un bloque de Jordan de orden 1 de A.

2. asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de A tienen magnitud menor que 1.

5.4. El Teorema de Lyapunov

Da una forma alternativa de chequear estabilidad asintótica de $\dot{x}(t) = Ax(t)$. La importancia de este resultado (en su forma general) es que permite estudiar la estabilidad de sistemas más generales, como por ejemplo inestacionarios o no lineales.

Definición 5.6 (Matriz Hurwitz). Diremos que una matriz A es *Hurwitz* si todos sus autovalores tienen parte real negativa.

Teorema 5.7 (Teorema de Lyapunov). La matriz A es Hurwitz si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y definida positiva N, la *ecuación de Lyapunov*

$$A^T M + MA = -N \tag{5.9}$$

tiene una solución única simétrica y definida positiva M.

Demostración. ($\Rightarrow$) La ecuación (5.9) es un caso especial de la ecuación de Lyapunov

$$AM + MB = C$$

que viéramos en § 3.7, con $A = A^T$, $B = A$, y $C = -N$. Como A y A^T tienen los mismos autovalores, si A es Hurwitz no hay dos autovalores λ_i y λ_j tales que $\lambda_i + \lambda_j = 0$. Así, por lo visto en § 3, la ecuación de Lyapunov es no singular y tiene una solución única M para cada N.

Postulamos la siguiente candidata a solución

$$M = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} dt. \tag{5.10}$$

Substituyendo (5.10) en (5.9) da

$$\begin{aligned} A^T M + MA &= \int_0^\infty A^T e^{A^T t} N e^{At} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} A dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} N e^{At} \right) dt \\ &= e^{A^T t} N e^{At} \Big|_{t=0}^\infty = 0 - N = -N, \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $\lim_{\infty} e^{At} = 0$ puesto que A es Hurwitz. Así mostramos que en efecto M de (5.10) es solución de la ecuación de Lyapunov (5.9).

De (5.10) se ve también que si N es simétrica, también lo es M. Factoricemos $N = \bar{N}^T\bar{N}$ donde $\bar{N}$ es una matriz no singular, y consideremos

$$x^T M x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t}\bar{N}^T\bar{N}e^{At}x dt = \int_0^\infty \|\bar{N}e^{At}x\|_2^2 dt. \tag{5.11}$$

Como $\bar{N}$ y e^{At} son no singulares, para cualquier x no nulo el integrando de (5.11) es positivo para cada t. Es decir, $x^T M x > 0$ para todo $x \neq 0$, y concluimos que M es definida positiva.

($\Leftarrow$) Mostramos que si M y N son definidas positivas entonces A es Hurwitz. Sea λ un autovalor de A y $v \neq 0$ el autovector correspondiente, es decir, $Av = \lambda v$. Tomando la traspuesta conjugada obtenemos $v^* A^T = \lambda^* v^*$. Así, de (5.9)

$$\begin{aligned} -v^* N v &= v^* A^T M v + v^* M A v \\ &= (\lambda^* + \lambda) v^* M v = 2 \operatorname{Re} \lambda v^* M v. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Como los términos $v^* M v$ y $v^* N v$ son reales y positivos, como viéramos en el § 3, (5.12) implica que $\operatorname{Re}\lambda < 0$ y muestra que A es Hurwitz. □

Un corolario de este resultado que nos va a ser útil más adelante es el siguiente.

Corolario 5.3. La matriz A es Hurwitz si y sólo si para cualquier matriz $\bar{N}$ $m \times n$ con $m < n$ y la propiedad

$$\operatorname{rango} O \triangleq \operatorname{rango} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} = n,$$

la ecuación de Lyapunov

$$A^T M + MA = -\bar{N}^T\bar{N}$$

tiene una solución única simétrica y definida positiva M.

Un resultado importante que usamos en la prueba del Teorema de Lyapunov es el siguiente, que resumimos en un teorema aparte.

Teorema 5.8. Si A es Hurwitz, entonces la ecuación de Lyapunov

$$A^T M + MA = -N$$

tiene una solución única para cada N que puede ser expresada como

$$M = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} dt.$$

5.4.1. Estabilidad Interna de Sistemas Discretos

La contrapartida discreta de la ecuación general de Lyapunov $XM + MY = C$ vista en el Capítulo 3 es

$$M - XMY = C, \tag{5.13}$$

donde las matrices X e Y son respectivamente $n \times n$ y $m \times m$ y las matrices M y C son $n \times m$. De forma similar al caso visto, la ecuación (5.13) es una ecuación lineal en M que puede reescribirse en la forma $\mathcal{A}\vec{M} = \vec{C}$. Si λ_i es un autovalor de X y μ_j un autovalor de Y, la condición para que exista una solución única M de (5.13) es que

$$\lambda_i \mu_j \neq 1 \text{ para todo } i, j. \tag{5.14}$$

Puede verse intuitivamente como surge la condición (5.14). Sea u un autovector derecho (vector columna $n \times 1$) asociado al autovalor λ_i de X; o sea, $Xu = \lambda_i u$. Sea v un autovector izquierdo (vector fila $1 \times m$) asociado al autovalor μ_j de Y; o sea, $vY = \mu_j v$. Si pensamos a la ecuación (5.13) en términos de la función matricial

$$\mathcal{F}(M) \triangleq M - XMY,$$

la ecuación se reduce a $\mathcal{F}(M) = C$. Evaluando $\mathcal{F}$ en la matriz $n \times m$ $M = uv$, tenemos que

$$\mathcal{F}(uv) = uv - XuvY = (1 - \lambda_i \mu_j) uv,$$

por lo que lo $1 - \lambda_i \mu_j$ son autovalores de (5.13). Si $1 - \lambda_i \mu_j \neq 0$, entonces existe una solución única de la ecuación $\mathcal{F}(M) = C$. De otro modo, pueden o no existir soluciones.

Volvemos entonces ahora a la condición de estabilidad para el sistema discreto $x[k+1] = Ax[k]$.

Teorema 5.9 (Teorema de Lyapunov Discreto). Todos los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tienen magnitud menor que 1 si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y definida positiva N, o $N = \bar{N}^T N$, donde $\bar{N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m < n$ tiene la propiedad

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} = n,$$

la ecuación de Lyapunov discreta

$$M - A^T M A = N \tag{5.15}$$

tiene una solución única simétrica y positiva definida M.

Un esquema de la demostración, que sigue pasos similares a la del caso continuo, se puede encontrar en Chen [1999, p.~136-137]. En este caso una solución explícita M está dada por el siguiente resultado.

Teorema 5.10 (Solución de la Ecuación de Lyapunov Discreta). Si todos los autovalores de la matriz A tienen magnitud menor que 1, entonces la ecuación de Lyapunov

$$M - A^T M A = N$$

tiene solución única para cada N, y la solución puede expresarse en la forma

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (A^T)^m N A^m. \tag{5.16}$$

Remarcamos que aún cuando A tuviera autovalores con magnitud *mayor* que 1, la ecuación de Lyapunov tiene solución si se cumple (5.14), pero no puede expresarse en la forma (5.16).

La función MATLAB `lyap` calcula la solución de la ecuación de Lyapunov continua, mientras que la función `dlyap` calcula la discreta.

5.5. Estabilidad de Sistemas Inestacionarios

5.5.1. Estabilidad entrada/salida

El concepto de estabilidad BIBO para sistemas lineales inestacionarios es el mismo que vimos en el caso estacionario; si el sistema está representado por

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau,$$

decimos que el sistema es BIBO estable si toda entrada acotada produce una salida acotada. Como antes, la condición necesaria y suficiente para estabilidad BIBO es que exista una constante finita M tal que para todo t y todo t_0, $t \geq t_0$,

$$\int_{t_0}^{t} \|G(t,\tau)\| d\tau \leq M.$$

5.5.2. Estabilidad interna

Como en el caso estacionario, la ecuación $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ es *estable en el sentido de Lyapunov* si toda condición inicial genera una respuesta acotada. Como la respuesta está gobernada por

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0),$$

concluimos que la respuesta es Lyapunov estable si y sólo si existe una constante finita M tal que para todo t y t_0, $t \geq t_0$,

$$\|\Phi(t,t_0)\| \leq M < \infty. \tag{5.17}$$

La ecuación $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ es *asintóticamente estable* si la respuesta generada por toda condición inicial es acotada y además tiende a cero cuando $t \to \infty$. Las condiciones de estabilidad asintótica incluyen (5.17) y además

$$\|\Phi(t,t_0)\| \to 0 \quad \text{cuando } t \to \infty.$$

Dado que en el caso inestacionario la respuesta depende del tiempo inicial t_0, interesa caracterizar la estabilidad del sistema de como una propiedad independiente de t_0. Así surgen las nociones de *estabilidad uniforme* y *estabilidad asintótica uniforme*.

Definición 5.7 (Estabilidad Uniforme). La ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

es *uniformemente estable* si existe una constante finita positiva γ tal que para cualquier t_0 y x_0 la solución correspondiente satisface

$$\|x(t)\| \leq \gamma\|x_0\|, \qquad t \geq t_0. \tag{5.18}$$

Notar que como la ecuación (5.18) debe satisfacerse en $t = t_0$, la constante γ debe ser mayor que 1.

El adjetivo *uniforme* se refiere precisamente a que γ no debe depender de la elección del tiempo inicial, como se ilustra en la Figura 5.8.

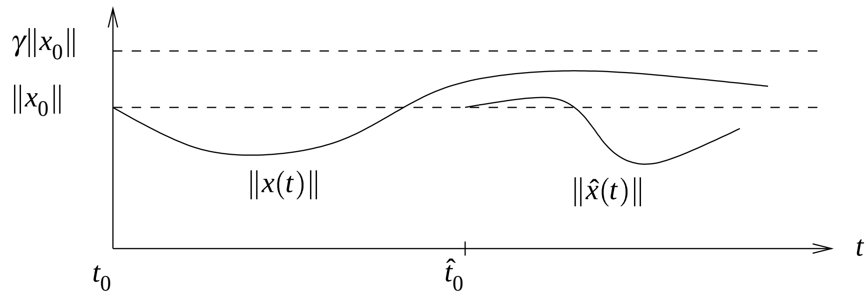


Figura 5.8: Estabilidad uniforme.

Ejemplo 5.7. La ecuación $\dot{x}(t) = (4t \operatorname{sen} t - 2t)x(t), x(t_0) = x_0$ puede verificarse que tiene la solución

$$x(t) = e^{(4 \operatorname{sen} t - 4t \cos t - t^2 - 4 \operatorname{sen} t_0 + 4t_0 \cos t_0 + t_0^2)} x_0. \tag{5.19}$$

Es fácil ver que para un t_0 *fijo*, existe un γ tal que (5.19) es acotada por $\gamma\|x_0\|$ para todo $t \geq t_0$, dado que el término $-t^2$ domina en el exponente cuando t crece.

Sin embargo, la ecuación de estado no es uniformemente estable. Con un estado inicial x_0 fijo, consideremos la secuencia $t_0 = 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, y los valores de las correspondientes soluciones evaluadas π segundos más tarde:

$$x(2(k+1)\pi) = e^{(4k+1)\pi(4-\pi)} x_0.$$

Claramente, no hay cota del factor exponencial independiente de k, o sea que γ va a depender forzosamente de k, y así del tiempo inicial t_0.

Definición 5.8 (Estabilidad Exponencial Uniforme (EEU)). La ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.20}$$

es *uniformemente exponencialmente estable* si existen constantes finitas positivas γ, λ tales que para cualquier t_0 y x_0 la solución correspondiente satisface

$$\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\|, \qquad t \geq t_0.$$

Nuevamente, $\gamma \geq 1$, y el adjetivo *uniforme* se refiere a que γ y λ son independientes de t_0, como se ilustra en la Figura 5.9.

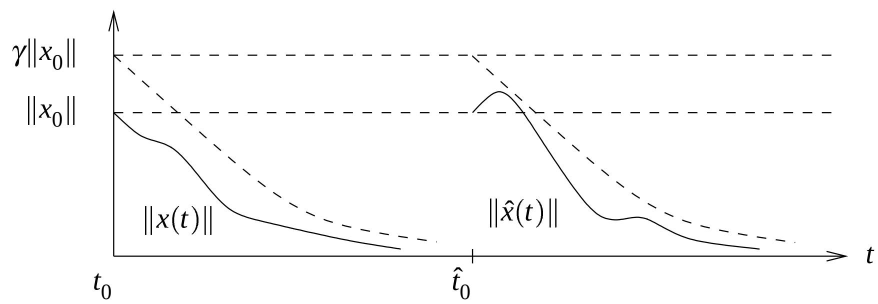


Figura 5.9: Estabilidad exponencial uniforme.

Teorema 5.11 (EEU para $A(t)$ acotada). Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq \alpha$ para todo t. Entonces la ecuación lineal (5.20) es uniformemente exponencialmente estable si y sólo si existe $\beta > 0$ tal que

$$\int_{\tau}^{t} \|\Phi(t,\sigma)\| d\sigma \leq \beta \qquad \text{para todo } t, \tau, t \geq \tau.$$

Demostración. Ver Rugh [1995, p.˜102-103]. □

En el caso estacionario, $A(t) = A$, la condición el teorema anterior lleva al requerimiento de que todos los autovalores de A tengan parte real negativa para que el sistema tenga EEU.

En el caso inestacionario los autovalores de $A(t)$ *no* determinan las propiedades de estabilidad del sistema, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.8. Sea el sistema inestacionario

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t). \tag{5.21}$$

El polinomio característico de $A(t)$ es

$$\det(\lambda I - A(t)) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -e^{2t} \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2,$$

por lo que $A(t)$ tiene dos autovalores en $\lambda = -1$ para todo t. Puede verificarse que la matriz

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

satisface la condición

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

y es por lo tanto la matriz de transición de estados del sistema (5.21). Como la entrada $a_{12}(t)$ de $A(t)$ crece en forma ilimitada con t, el sistema no puede ser asintóticamente o Lyapunov estable.

A diferencia del caso estacionario, los autovalores de $A(t)$ no son útiles para chequear estabilidad.

5.5.3. Invariancia frente a transformaciones de equivalencia

En el caso inestacionario las propiedades de estabilidad, determinadas por los autovalores de A, son invariantes frente a transformaciones de equivalencia. En el caso inestacionario sabemos que esta propiedad no se conserva, ya es posible llevar la matriz $A(t)$ a una matriz constante arbitraria $\bar{A}$ mediante una transformación de equivalencia inestacionaria $P(t)$. No obstante, para ciertas $P(t)$, es posible hacer que las propiedades de estabilidad sean también invariantes en el caso inestacionario.

Definición 5.9 (Transformación de Lyapunov). Una matriz $n \times n$ $P(t)$ que es continuamente diferenciable e invertible en cada t se llama *transformación de Lyapunov* si existen constantes ρ y η tales que para todo t

$$\|P(t)\| \leq \rho, \qquad |\det P(t)| \geq \eta. \tag{5.22}$$

Una condición equivalente a la (5.22) es la existencia de una constante ρ tal que para todo t

$$\|P(t)\| \leq \rho, \qquad \|P^{-1}(t)\| \leq \rho.$$

Teorema 5.12 (Equivalencia y Estabilidad en Sistemas Inestacionarios). Supongamos que $P(t)$ es una transformación de Lyapunov. Entonces la ecuación lineal (5.20) es uniformemente (exponencialmente) estable si y sólo si la ecuación de estado

$$\dot{z}(t) = [P^{-1}(t)A(t)P(t) - P^{-1}(t)\dot{P}(t)]z(t)$$

es uniformemente (exponencialmente) estable.

5.6. Resumen

- Hemos introducido los primeros conceptos de estabilidad de sistemas estacionarios, comenzando por la estabilidad externa BIBO: entrada-acotada/salida-acotada.
- Vimos que un sistema es BIBO estable si y sólo si
  - su respuesta al impulso es absolutamente integrable (sumable, para sistemas discretos), o
  - si su función transferencia $\hat{g}(s)$ (en discreto $\hat{g}(z)$) es racional y propia, todos los polos de $\hat{g}(s)$ tienen parte real negativa (los polos de $\hat{g}(z)$ tienen magnitud menor que 1).
- Los sistemas MIMO son BIBO estables si y sólo si todos los subsistemas SISO que conectan las diferentes entradas y salidas son BIBO estables.
- La respuesta en régimen permanente de un sistema BIBO a una entrada sinusoidal de frecuencia ω_0 es sinusoidal de la misma frecuencia, y con magnitud y fase dadas por el la magnitud y fase de la función transferencia del sistema evaluada en $s = j\omega_0$ ($z = e^{j\omega_0}$ en sistemas discretos.
- Definimos estabilidad interna para un sistema con entradas nulas. Definimos *estabilidad según Lyapunov*, y *estabilidad asintótica*.
- La condición necesaria y suficiente para estabilidad según Lyapunov es que la matriz A en $\dot{x} = Ax$ no tenga autovalores con parte real positiva, y para aquellos autovalores con parte real nula, que no estén asociados a un bloque de Jordan de dimensión mayor que 1.
- La condición necesaria y suficiente para estabilidad asintótica es que todos los autovalores de A tengan para real negativa (Hurwitz).
- Presentamos un método alternativo de chequear si la matriz A es Hurwitz (tiene todos sus autovalores con parte real negativa), mediante la existencia de solución de una ecuación de Lyapunov..
- Vimos el teorema de Lyapunov para sistemas discretos, que vincula la existencia de solución de la ecuación $M - A^T MA = N$ con la propiedad de que A tenga todos sus autovalores dentro del círculo unitario.

- Vimos las nociones de estabilidad para sistemas lineales inestacionarios, incluyendo estabilidad uniforme y estabilidad exponencial uniforme.
- Una nota importante es que los autovalores de $A(t)$ en general no determinan la estabilidad en sistemas lineales inestacionarios.

5.7. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Probar que las funciones e^{pt} y te^{pt} son absolutamente integrables si y sólo si $p \in \mathbb{C}^-$.[2]

Ejercicio 5.2. Es el sistema con función transferencia $\hat{g}(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$ BIBO estable?

Ejercicio 5.3. ¿Cuáles son las respuestas en régimen permanente de un sistema con función transferencia $\hat{g}(s) = \frac{s-2}{s+1}$ excitado por $u_1(t) = 3$ y $u_2(t) = \operatorname{sen} 2t$ para $t \geq 0$?

Ejercicio 5.4. Probar los Teoremas 5.4 y 5.2 para sistemas discretos.

Ejercicio 5.5. Analizar la estabilidad de los siguientes sistemas

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k]$$

$$x[k+] = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k]$$

Ejercicio 5.6. Probar que todos los autovalores de A tienen parte real menor que $-\mu < 0$ si y sólo si para cualquier matriz simétrica y positiva definida N dada, la ecuación

$$A^T M + MA + 2\mu M = -N$$

tiene una solución única simétrica y positiva definida M.

Ejercicio 5.7. Probar que todos los autovalores de A tienen magnitud menor que ρ si y sólo si para cualquier matriz simétrica y positiva definida N dada, la ecuación

$$\rho^2 M - A^T MA = \rho^2 N$$

tiene una solución única simétrica y positiva definida M.

Ejercicio 5.8. ¿Es el sistema con respuesta al impulso $g(t,\tau) = e^{-2|t|-|\tau|}$ para $t \geq \tau$ BIBO estable? ¿Qué hay de $g(t,\tau) = e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} t \cos \tau$?

[2] $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$.

Ejercicio 5.9. Es el sistema $\dot{x}(t) = 2tx(t) + u(t), y(t) = e^{-t^2}x(t)$ BIBO estable?¿ Estable en el sentido de Lyapunov? ¿Asintóticamente estable?

Ejercicio 5.10. Mostrar que la ecuación del problema anterior puede transformarse, usando $\bar{x}(t) = P(t)x(t)$ con $P(t) = e^{-t^2}$, en

$$\dot{\bar{x}}(t) = e^{-t^2}u(t), y(t) = \bar{x}(t).$$

Es el sistema transformado BIBO estable?¿ Estable en el sentido de Lyapunov? ¿Asintóticamente estable? Es $P(t)$ una transformación de Lyapunov?

Bibliografía

John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.

Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.

John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Pub. Co., 1992.

B. Friedland. *Control System Design*. McGraw-Hill, 1986.

G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2000.

G.C. Goodwin and K.S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.

Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.

Ricardo Sánchez Peña. *Introducción a la teoría de control robusto*. Asociación Argentina de Control Automático, 1992.

M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.

C.F. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(3):395–404, June 1978.