

# Capítulo 6

## Controlabilidad y Observabilidad

En este capítulo introducimos los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Estos conceptos describen la interacción entre el mundo externo (entradas y salidas) y las variables internas del sistema (estados). La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas, mientras que la observabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento interno del sistema puede detectarse en sus salidas.

### 6.1. Controlabilidad

#### 6.1.1. Definiciones y tests fundamentales

Consideremos el sistema de  $n$  estados y  $p$  entradas

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6.1)$$

con las matrices constantes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Como la controlabilidad relaciona las entradas y los estados del sistema, la ecuación de salida es irrelevante.

**Definición 6.1 (Controlabilidad).** La ecuación de estados (6.1), o el par  $(A, B)$ , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una entrada que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo finito. En caso contrario, la ecuación (6.1), o el par  $(A, B)$ , se dice *no controlable*.

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial al cualquier estado final en tiempo finito, no importando qué trayectoria se siga, o qué entrada se use.

**Ejemplo 6.1 (Sistemas no controlables).** Consideremos el sistema eléctrico de la izquierda en la Figura 6.1. El sistema es de primer orden con variable de estado  $x$ , la tensión en el capacitor. Si la carga inicial del capacitor es nula,  $x(0) = 0$ , entonces  $x(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  independientemente de la tensión  $u$  de entrada aplicada, debido a la simetría de la red. La ecuación que describe el sistema es no controlable. Veamos ahora el sistema de la derecha en la misma figura. Éste tiene dos variables de estado, las tensiones en los dos capacitores,  $x_1$  y  $x_2$ . La entrada puede llevar  $x_1$  o  $x_2$  a cualquier valor, pero no puede llevar  $x_1$  y  $x_2$  a distintos valores. Por ejemplo, si  $x_1(0) = x_2(0)$  entonces  $x_1(t) = x_2(t)$  para todo  $t \geq 0$  independientemente de la tensión aplicada en  $u$ . También aquí, la ecuación que describe el sistema es no controlable.

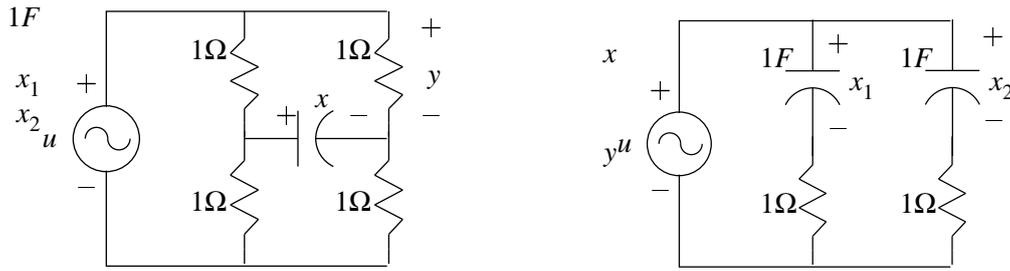


Figura 6.1: Sistemas eléctricos no controlables

**Teorema 6.1 (Tests de Controlabilidad).** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , es controlable.
2. La matriz de controlabilidad,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np}, \quad (6.2)$$

es de rango  $n$  (rango fila pleno).

3. La matriz  $n \times n$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T (t-\tau)} d\tau \quad (6.3)$$

es no singular para todo  $t > 0$ .

*Demostración.*

**(1 $\Rightarrow$ 2)** Consideremos dos vectores cualesquiera  $x_0$  y  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  y un intervalo finito de tiempo  $t_1$  cualquiera. Como el sistema es controlable, sabemos que existe alguna entrada  $u(t)$  que transfiere el estado de  $x(0) = x_0$  al estado final  $x(t_1) = x_1$  en el tiempo  $t_1$ . Usando la fórmula de variación de los parámetros, tenemos entonces que se satisface la ecuación

$$x_1 = x(t_1) = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau = x_1 - e^{At_1} x_0. \quad (6.4)$$

Llamemos  $z$  al vector  $z \triangleq x_1 - e^{At_1} x_0$ .

Recordemos de § 3.6.4 la propiedad que dice que toda función matricial de una matriz  $n \times n$  se puede expresar como un polinomio matricial de orden  $n - 1$ ; entonces podemos escribir  $e^{A(t_1-\tau)}$  como un polinomio en  $A$  (con coeficientes dependientes de  $\tau$ ),

$$\begin{aligned} e^{A(t_1-\tau)} &= e^{At_1} e^{-A\tau} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k(\tau) A^k \\ &= \eta_0(\tau) I + \eta_1(\tau) A + \dots + \eta_{n-1}(\tau) A^{n-1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Reemplazando (6.5) en (6.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
z &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \\
&= \int_0^{t_1} [\eta_0(\tau)I + \eta_1(\tau)A + \cdots + \eta_{n-1}(\tau)A^{n-1}] B u(\tau) d\tau \\
&= \int_0^{t_1} [B\eta_0(\tau)u(\tau) + ABu(\tau)\eta_1(\tau) + \cdots + A^{n-1}B\eta_{n-1}(\tau)u(\tau)] d\tau \\
&= \int_0^{t_1} [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \eta_0(\tau)u(\tau) \\ \eta_1(\tau)u(\tau) \\ \dots \\ \eta_{n-1}(\tau)u(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\
&= [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} \eta_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^{t_1} \eta_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \dots \\ \int_0^{t_1} \eta_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix} = Cr \tag{6.6}
\end{aligned}$$

donde hemos definido como  $r$  el vector de la derecha en la línea anterior a (6.6), y  $C$  es la matriz de controlabilidad de (6.2). Así, en otras palabras, la controlabilidad del par  $(A, B)$  implica que la ecuación lineal algebraica  $z = Cr$  siempre tiene solución, para  $z$  y  $r$  en  $\mathbb{R}^n$  arbitrarios. Del Teorema 3.1, sigue que esto sucede si y sólo si la matriz  $C$  es de rango fila pleno, es decir,  $n$ . Hemos mostrado que  $1 \Rightarrow 2$ .

**(2  $\Rightarrow$  3)** Mostramos esta implicación por contradicción. Supongamos que la matriz  $C$  tiene rango fila pleno pero que existe algún  $t > 0$  tal que  $W_c(t)$  es singular. Por la forma del integrando en (6.3), la matriz  $W_c(t)$  es siempre semidefinida positiva, y que sea singular es equivalente a decir que existe algún vector no nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $v^T W_c(t) v = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned}
0 &= v^T W_c(t) v \\
&= \int_0^t v^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} v d\tau = \int_0^t \|v^T e^{A\tau} B\|^2 d\tau
\end{aligned}$$

que es equivalente a decir que  $v^T e^{A\tau} B = 0$  para todo  $\tau \in [0, t]$ . Escribiendo la exponencial  $e^{A\tau}$  en forma polinomial, similar a (6.5), tenemos

$$0 = v^T e^{A\tau} B = v^T [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \eta_0(\tau)I_p \\ \eta_1(\tau)I_p \\ \dots \\ \eta_{n-1}(\tau)I_p \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Como  $e^{A\tau} B \neq 0$  si  $B \neq 0$ , la única posibilidad de que se dé (6.7) para todo  $\tau$  es que  $v^T C = 0$ , que implicaría que el rango fila de  $C$  es menor que  $n$ , lo cual es una contradicción, y prueba que  $2 \Rightarrow 3$ .

**(3  $\Rightarrow$  1)** Sean  $x_0$  y  $x_1$  dos vectores cualesquiera de  $\mathbb{R}^n$ , y  $t_1 > 0$  arbitrario. Si  $W_c(t)$  es no singular para cualquier  $t > 0$ , entonces podemos construirnos la entrada

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1) (e^{A t_1} x_0 - x_1). \tag{6.8}$$

Veamos que esta entrada transfiere el estado del sistema de  $x_0$  a  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ . Efectivamente, reemplazando  $u(t)$  de (6.8) en la fórmula de variación de los parámetros para  $x(t_1)$  tenemos

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1}x_0 - \left( \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t-\tau)}d\tau \right) W_c^{-1}(t_1)(e^{At_1}x_0 - x_1) \\ &= e^{At_1}x_0 - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)(e^{At_1}x_0 - x_1) = x_1. \end{aligned}$$

Como  $x_0, x_1,$  y  $t_1 > 0$  son arbitrarios, hemos mostrado que el sistema es controlable. □

**Ejemplo 6.2.** En el Ejemplo 2.4 vimos la linealización de un péndulo invertido. La ecuación de estados lineal de un péndulo dado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] x. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Calculamos la matriz de controlabilidad

$$C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puede mostrarse que esta matriz tiene rango 4; por lo que el sistema es controlable. Por lo tanto, si el ángulo  $x_3 = \theta$  se desviara ligeramente de cero, existe un control  $u$  que lo retorna a cero en tiempo finito. De hecho, la controlabilidad nos garantiza que existe un control  $u$  capaz de llevar la posición del carro,  $x_1 = y$ , el ángulo  $x_3 = \theta$ , y sus derivadas a cero. Este hecho es consistente con la experiencia de balancear un escobillón sobre la palma de una mano.

Cabe notar que si bien esto es estrictamente cierto, en la práctica el control necesario puede ser imposible de implementar; por ejemplo si se exceden los límites admisibles de corriente del motor que mueve el carro.

### 6.1.2. Control de mínima energía y gramiano de controlabilidad

La ley de control  $u(t)$  de (6.8) tiene una propiedad interesante: es el control que gasta *mínima energía* en llevar al sistema del estado  $x_0$  al estado  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ , en el sentido de que para otro control  $\tilde{u}(t)$  que haga la misma transferencia siempre se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau &\geq \int_0^{t_1} \|u(\tau)\|^2 d\tau \\ &= (x_0^T e^{A^T(t_1)} - x_1^T) W_c^{-1}(t_1) \left( \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}d\tau \right) W_c^{-1}(t_1)(e^{A(t_1)}x_0 - x_1) \\ &= (x_0^T e^{A^T(t_1)} - x_1^T) W_c^{-1}(t_1)(e^{A(t_1)}x_0 - x_1) \\ &= \|W_c^{-\frac{1}{2}}(t_1)(e^{A(t_1)}x_0 - x_1)\|^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Vemos de (6.10) que la mínima energía de control es mayor cuanto mayor sea la distancia entre  $x_0$  y  $x_1$ , y cuanto menor el tiempo de transferencia  $t_1$  (ya que  $W_c(t_1)$  es más cercano a ser singular).

Si la matriz  $A$  es Hurwitz, la integral  $W_c(t)$  (6.3) converge para  $t = \infty$ . En ese caso notamos simplemente  $W_c(t) = W_c$ , y se llama *gramiano de controlabilidad*. Si el par  $(A, B)$  es controlable, entonces por el Teorema 6.1.2 la matriz de controlabilidad (transpuesta)

$$C^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A \\ \vdots \\ B^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango  $n$ . Vimos en el Teorema 5.8 en § 5.4 que esta condición, si la matriz  $A$  es Hurwitz, garantiza que  $W_c$  es la única solución, y positiva definida, de la ecuación

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T. \quad (6.11)$$

Las funciones MATLAB  $Cc=ctrb(A, B)$  y  $W=gram(A, B)$  calculan respectivamente la matriz de controlabilidad  $C$  y el gramiano de controlabilidad  $W_c$ . Para saber si un sistema es controlable podemos chequear el rango de  $C$  o  $W_c$ . Para calcular el control de mínima energía (6.8) necesitamos la matriz  $W_c(t_1)$ , que podemos calcular usando el Teorema 4.1 (ver) implementando

$$W_c(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0_n & -A^T \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 0_n \\ e^{A^T t} \end{bmatrix},$$

En MATLAB:

```
O=zeros(n,n);
I=eye(n);
Wt=[I,O]*expm([A,B*B^T;O,-A^T]*t)*[O;expm(A^T*t)];
```

**Ejemplo 6.3.** La Figura 6.2 ilustra una plataforma de las usadas para estudiar sistemas de suspensión para automóviles. El sistema consiste de una plataforma cuyos extremos la sustentan al piso mediante sistemas independientes de resortes y amortiguadores de fricción viscosa. Asumiendo la masa de la plataforma cero, cada sistema de amortiguación en los extremos recibe la mitad de la fuerza aplicada a la plataforma. Las constantes de los resortes se asumen 1 y los coeficientes de fricción viscosa 2 y 1 respectivamente. Tomando los desplazamientos de la posición de equilibrio de los extremos de la plataforma como variables de estado, tenemos que la siguiente ecuación de estados describe este sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Si los desplazamientos iniciales son distintos de cero, y si no hay fuerza aplicada, la plataforma va a volver a su posición de equilibrio exponencialmente (los autovalores de la matriz  $A$  del sistema son  $-0,5$  y  $-1$ , por lo que el sistema es asintóticamente estable). En teoría el sistema tomaría un tiempo infinito en alcanzar su posición de equilibrio. Nos planteamos el siguiente problema: si  $x_1(0) = 10$  y  $x_2(0) = -1$ , ¿podemos aplicar una fuerza que lleve la plataforma a su posición de equilibrio en 2 segundos? La respuesta no parece obvia pues la *misma* fuerza se aplica a los dos sistemas de amortiguación.

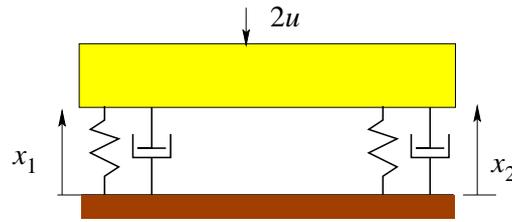


Figura 6.2: Sistema plataforma

Calculamos el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango } [B \quad AB] = \text{rango } \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

Vemos que el sistema es controlable y, para cualquier  $x(0)$ , existe una entrada que transfiera al sistema de  $x(0)$  a su posición de equilibrio en 2 segundos. Calculamos la matriz

$$\begin{aligned} W_c(2) &= \int_0^2 \left( \begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 0,2162 & 0,3167 \\ 0,3167 & 0,4908 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así la fuerza

$$\begin{aligned} u_2(t) &= - \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0,5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} W_c^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -58,82e^{0,5t} + 27,96e^t \end{aligned}$$

para  $t \in [0, 2]$  lleva al estado del sistema de  $x(0) = [10, -1]^T$  a  $[0, 0]^T$  en 2 segundos, como se ve en la Figura 6.3.

Si recalculamos la fuerza necesaria para transferir el estado de  $x_0$  al equilibrio pero ahora en 4 segundos, obtenemos

$$\begin{aligned} W_c(4) &= \begin{bmatrix} 0,2454 & 0,3325 \\ 0,3325 & 0,4998 \end{bmatrix} \\ u_4(t) &= -3,81e^{0,5t} + 0,69e^t \end{aligned} \quad (6.12)$$

Notar que el control que hace la misma transferencia pero en un tiempo mayor es significativamente más pequeño (usa menos energía). ¿Cuál será la fuerza necesaria si  $t \rightarrow \infty$ ?

**Ejemplo 6.4.** Consideramos de nuevo el sistema plataforma de la Figura 6.2, pero esta vez asumiendo que las constantes de los resortes y los coeficientes de fricción viscosa son todos iguales a 1. La ecuación de estados del sistema deviene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Esta vez tenemos que

$$\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

y el sistema no es controlable. Si  $x_1(0) \neq x_2(0)$  no existe entrada que pueda transferir el sistema a cero en tiempo finito.

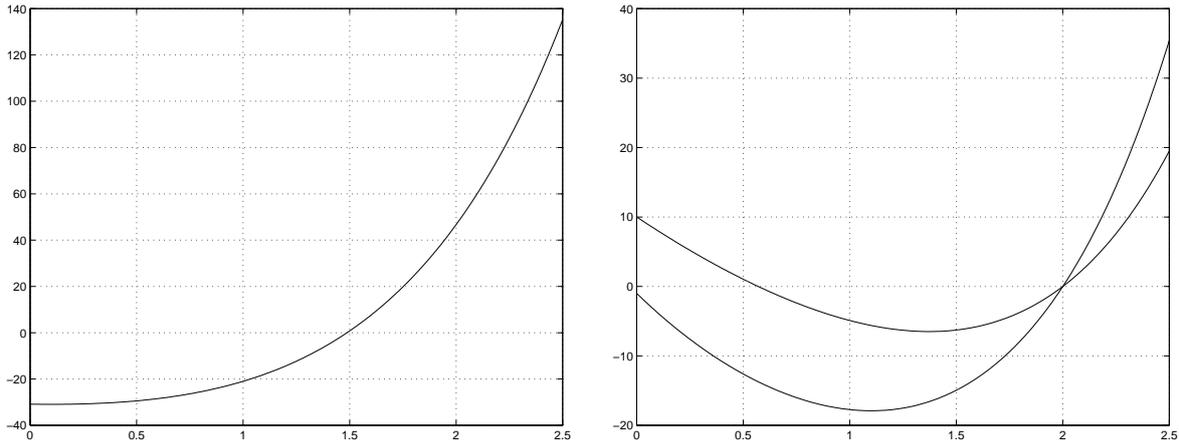


Figura 6.3: Actuación y Variación de los Estados

### 6.1.3. Tests PBH de controlabilidad

Los tests de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) no son tan comunes como los presentados en el Teorema 6.1, pero tienen interpretaciones geométricas interesantes y nos van a servir para analizar controlabilidad en forma de Jordan. Hay dos tipos de tests PBH, de *autovectores*, y de *rango*.

**Lema 6.1 (Test PBH de autovectores).** El par  $(A, B)$  es *no* controlable si y sólo si existe un autovector izquierdo  $v \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  de  $A$ , tal que

$$vB = 0.$$

*Demostración.*

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que existe un autovector izquierdo  $v$  de  $A$ ,

$$vA = \lambda v, \tag{6.13}$$

tal que  $vB = 0$ . Multiplicando por derecha ambos lados de (6.13) por  $B$  obtenemos

$$vAB = \lambda vB = 0.$$

Multiplicando por derecha ambos lados de (6.13) por  $AB$  obtenemos

$$vA^2B = \lambda vAB = \lambda^2 vB = 0.$$

Así, multiplicando (6.13) por  $A^2B, A^3B, \dots$ , seguimos la secuencia hasta mostrar que

$$vC = v [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = 0,$$

que implica que el rango fila de la matriz de controlabilidad es menor que  $n$ ,  $\text{rango } C < n$ . Por el Teorema 6.1, el par  $(A, B)$  es no controlable.

( $\Rightarrow$ ) Ejercicio.

□

**Lema 6.2 (Test PBH de rango).** El par  $(A, B)$  es controlable si y sólo si

$$\text{rango} [sI - A \quad B] = n \quad \text{para todo } s.$$

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Si  $\text{rango}[sI - A \quad B] = n$  para todo  $s$ , no puede existir ningún vector no nulo  $v$  tal que

$$v[sI - A \quad B] = [v(sI - A) \quad vB] = 0.$$

Por lo tanto, no puede haber *ningún* vector que cumpla simultáneamente  $vs = vA$  y  $vB = 0$ . Por el test PBH de autovectores, el sistema es controlable.

( $\Leftarrow$ ) Ejercicio. □

### 6.1.4. Controlabilidad y transformaciones de semejanza

**Teorema 6.2 (Invariancia de la controlabilidad respecto a cambio de coordenadas).** La controlabilidad es una propiedad invariante con respecto a transformaciones de equivalencia (cambios de coordenadas).

*Demostración.* Consideremos el par  $(A, B)$  con matriz de controlabilidad

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

y su par equivalente  $(\bar{A}, \bar{B})$ , donde  $\bar{A} = PAP^{-1}$  y  $\bar{B} = PB$ , y  $P$  es una matriz no singular. La matriz de controlabilidad del par  $(\bar{A}, \bar{B})$  es

$$\begin{aligned} \bar{C} &= [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= [PB \quad PAP^{-1}PB \quad \dots \quad PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ &= P [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \\ &= PC. \end{aligned}$$

Como  $P$  es no singular, tenemos que  $\text{rango } C = \text{rango } \bar{C}$ . □

## 6.2. Observabilidad

### 6.2.1. Definiciones y tests fundamentales

El concepto de observabilidad es dual al de controlabilidad, e investiga la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida. Consideramos el sistema lineal estacionario

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times p}. \quad (6.14)$$

**Definición 6.2 (Observabilidad).** La ecuación de estado (6.14) es observable si para cualquier estado inicial  $x(0)$  (desconocido), existe un tiempo finito  $t_1$  tal que el conocimiento de la entrada  $u$  y la salida  $y$  sobre el intervalo  $[0, t_1]$  es suficiente para determinar en forma única el estado inicial  $x(0)$ . En caso contrario el sistema no observable.

**Ejemplo 6.5 (Sistemas no observables).** En el circuito de la izquierda en la Figura 6.4, si la entrada es nula, la salida es idénticamente nula para cualquier tensión en el capacitor, debido a la simetría de las resistencias. Sabemos que la entrada y la salida son ambas nulas, pero la tensión inicial en el capacitor (el estado) puede no serlo y no podemos determinarla. Este sistema es no observable.

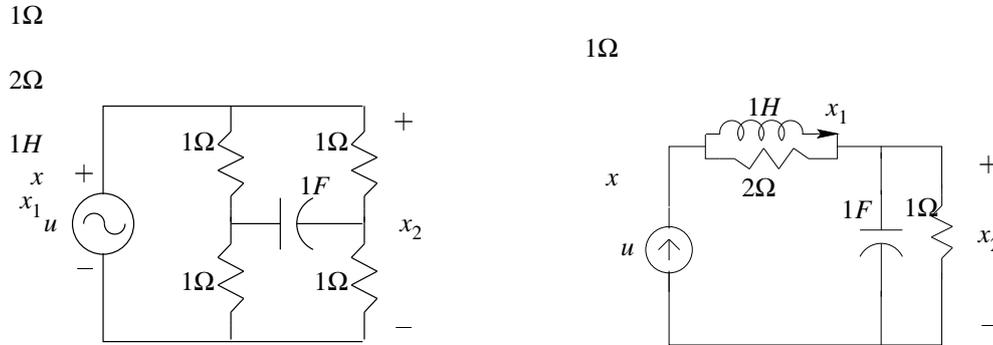


Figura 6.4: Sistemas eléctricos no observables

El circuito de la derecha en la Figura 6.4 tiene dos variables de estado, la corriente por la inductancia,  $x_1$ , y la tensión en el capacitor  $x_2$ . La entrada  $u$  es una fuente de corriente. Si  $u = 0$  y la tensión inicial en el capacitor es nula,  $x_2(0) = 0$ , la salida es nula independientemente de la corriente en la inductancia, que no necesariamente es nula. El estado inicial  $x_1(0)$  no puede ser determinado del conocimiento de  $u$  e  $y$ , y el sistema es no observable.

Dado un estado inicial  $x(0)$  y una entrada  $u(t)$ , la salida del sistema está dada por la fórmula

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (6.15)$$

Para estudiar observabilidad, la salida del sistema  $y(t)$  y la entrada  $u(t)$  se suponen conocidas, siendo el estado inicial  $x(0)$  la única incógnita. Así, de (6.15) podemos escribir

$$\begin{aligned} Ce^{At}x(0) &= \bar{y}(t) \\ &\triangleq y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde la variable  $\bar{y}(t)$  es una función conocida.

**Observación para un tiempo fijo** ¿Cómo resolvemos (6.16) para obtener  $x(0)$  de  $\bar{y}(t)$ ? Para un tiempo  $t$  fijo,  $Ce^{At}$  es una matriz  $q \times n$  real y constante, e  $\bar{y}(t)$  un vector  $q \times 1$  constante. Por su definición,  $\bar{y}(t)$  está siempre en la imagen de  $Ce^{At}$ , por lo que siempre existe una solución  $x(0)$ . La cuestión es si existe una solución única.

En general, dado que hay menos variables medibles que el número de estados del sistema, tenemos que  $q < n$ . En este caso la matriz  $Ce^{At}$  tiene rango a lo sumo  $q$ , y por lo tanto tiene un espacio nulo no trivial. En consecuencia, según los resultados de § 3.3, si  $q < n$  la solución no es única, y no podemos hallar un único valor  $x(0)$  de (6.16) para un  $t$  fijo dado.

Para poder determinar  $x(0)$  en forma única de (6.16) es necesario utilizar el conocimiento de  $y(t)$  y  $u(t)$  sobre un intervalo de tiempo de longitud no nula, como mostramos en el siguiente teorema.

**Teorema 6.3 (Test  $W_o$  de observabilidad).** La ecuación de estados (6.14) es observable si y sólo si la matriz  $W_o(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (6.17)$$

es no singular para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* Multiplicamos por izquierda ambos lados de (6.16) por  $e^{A^T t} C^T$  y luego integramos sobre  $[0, t_1]$ , lo que da

$$\left( \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \right) x(0) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \bar{y}(t) dt.$$

Si  $W_o(t_1)$  es no singular, entonces

$$x(0) = W_o^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \bar{y}(t) dt, \quad (6.18)$$

que da una única solución  $x(0)$ . Así hemos mostrado que si  $W_o(t)$  es no singular entonces el sistema es observable.

Para mostrar la reversa supongamos que  $W_o(t_1)$  es singular. Por su definición,  $W_o(t_1)$  es *semi-definida* positiva, o sea que existe un vector constante  $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  tal que

$$\begin{aligned} v^T W_o(t_1) v &= \int_0^{t_1} v^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} v dt \\ &= \int_0^{t_1} \|C e^{A t} v\|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Pero, por la propiedad de la norma, esto implica que

$$C e^{A t} v \equiv 0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1]. \quad (6.19)$$

Si  $u(t) \equiv 0$  entonces, en particular, las condiciones iniciales  $x(0) = v \neq 0$  y  $x(0) = 0$  dan ambas la misma salida  $y(t) = C e^{A t} x(0) \equiv 0$  y por lo tanto no pueden diferenciarse. Esto muestra que si  $W_o(t)$  es singular el sistema es inobservable, completando la prueba del teorema.  $\square$

De la definición de la matriz  $W_o(t)$  vemos que la observabilidad sólo depende de las matrices  $A$  y  $C$ . Así, la observabilidad es una propiedad del par  $(A, C)$ , e independiente de las matrices  $B$  y  $D$ .

**Teorema 6.4 (Dualidad entre controlabilidad y observabilidad).** El par  $(A, C)$  es observable si y sólo si el par  $(A^T, C^T)$  es controlable.

*Demostración.* Ejercicio; es inmediata de las definiciones de  $W_c(t)$  y  $W_o(t)$ .  $\square$

El teorema de dualidad hace inmediata la demostración de tests de observabilidad análogos a los de controlabilidad del Teorema 6.1.

**Teorema 6.5 (Tests de Observabilidad).** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par  $(A, C)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , es observable.

2. La matriz de observabilidad,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{nq \times n}, \quad (6.20)$$

es de rango  $n$  (rango columna pleno).

3. La matriz  $n \times n$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau = \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T C e^{A(t-\tau)} d\tau \quad (6.21)$$

es no singular para todo  $t > 0$ .

**Observación a través de diferenciación** Una forma alternativa de resolver (6.16) es a través de la diferenciación repetida de  $\tilde{y}(t)$  en  $t = 0$  (que equivale a la diferenciación repetida de la entrada y la salida). Es fácil verificar que  $\tilde{y}(0) = Cx(0)$ ,  $\dot{\tilde{y}}(0) = CAx(0)$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{y}^{(n-1)}(0) = CA^{n-1}x(0)$ , por lo que podemos escribir

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \dot{\tilde{y}}(0) \\ \dots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}, \quad \text{es decir, } \mathcal{O}x(0) = \tilde{y}(0). \quad (6.22)$$

Por construcción,  $\tilde{y}(0)$  está en la imagen de  $\mathcal{O}$ , y si el sistema es observable, el rango columna de  $\mathcal{O}$  es pleno, rango  $\mathcal{O} = n$ . Entonces, por el Teorema 3.2, existe una solución única del sistema de ecuaciones (6.22), dada por

$$x(0) = [\mathcal{O}^T \mathcal{O}]^{-1} \mathcal{O}^T \tilde{y}(0). \quad (6.23)$$

Notar que aún seguimos necesitando conocimiento de  $\tilde{y}(t)$  en un entorno de  $t = 0$  para poder determinar  $\dot{\tilde{y}}(0), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(0)$ .

Si bien es factible implementar observación mediante este método de diferenciación, en la práctica no es recomendable, ya que la medición de  $y(t)$  va a incluir casi siempre ruido de alta frecuencia. La diferenciación de  $\tilde{y}(t)$  "amplifica" el ruido, aumentando los errores en el cálculo de  $x(0)$ .

Por otro lado, como la integración tiene el efecto de "filtrar" ruido de alta frecuencia, es mucho mejor implementar el cálculo de  $x(0)$  a través de la fórmula (6.18).

### 6.2.2. Gramiano de observabilidad

Si la matriz  $A$  es Hurwitz, la integral  $W_o(t)$  de (6.17) converge para  $t = \infty$ . En ese caso notamos simplemente  $W_o(t) = W_o$ , y se llama *gramiano de observabilidad*. Si el par  $(A, C)$  es observable, entonces la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango  $n$ . Vimos en el Teorema 5.8 en § 5.4 que esta condición, si la matriz  $A$  es Hurwitz, garantiza que  $W_o$  es la única solución, y positiva definida, de la ecuación

$$W_o A + A^T W_o = -C^T C. \quad (6.24)$$

Las funciones MATLAB  $Ob=obsv(A, C)$  y  $Wo=gram(A', C')$  calculan respectivamente la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  y el gramiano de observabilidad  $W_o$ . Chequeando el rango de  $\mathcal{O}$  o  $W_o$  determinamos si un sistema es observable.

### 6.2.3. Tests PBH de observabilidad

La dualidad nos permite también extender los tests PBH al caso de observabilidad.

**Lema 6.3 (Test PBH de autovectores).** El par  $(A, C)$  es *no* observable si y sólo si existe un autovector derecho  $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  de  $A$ , tal que

$$Cv = 0.$$

**Lema 6.4 (Test PBH de rango).** El par  $(A, C)$  es observable si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \text{para todo } s.$$

### 6.2.4. Observabilidad y transformaciones de semejanza

**Teorema 6.6 (Invariancia de la observabilidad respecto a cambio de coordenadas).** La observabilidad es una propiedad invariante con respecto a transformaciones de equivalencia (cambios de coordenadas).

**Ejemplo 6.6 (Controlabilidad y observabilidad de un circuito RLC Bay [1999]).** Analizamos controlabilidad y observabilidad del circuito RLC de la Figura 6.5. Las ecuaciones de estado usando la tensión en el capacitor  $v_c$  y la corriente en la inductancia  $i_L$  como variables de estado, la tensión de alimentación  $v_s$  como entrada, y la tensión sobre la inductancia  $v_x$  como salida, son

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_s \\ v_x &= [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + v_s. \end{aligned} \quad (6.25)$$

El sistema es de segundo orden,  $n = 2$ , con una entrada y una salida,  $p = 1 = q$ .

Construimos la matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLC} \end{bmatrix}.$$

El rango de  $\mathcal{C}$  puede chequearse mediante el determinante,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{C} &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLC} \end{bmatrix} = -\frac{1}{R^2LC^2} + \frac{2}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C} \\ &= \frac{1}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C}. \end{aligned}$$

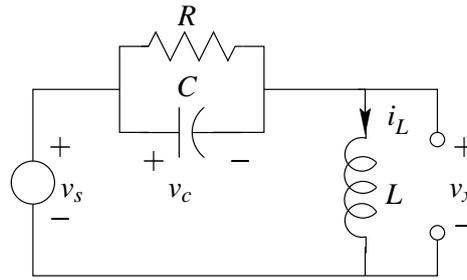


Figura 6.5: Circuito RLC

La condición para que este determinante sea cero es  $\frac{1}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C} = 0$ , que da  $R = \sqrt{L/C}$ .  
 Por otro lado, la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  es

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{RC} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix},$$

que es siempre de rango completo. En conclusión, el sistema es siempre observable, pero puede llegar a ser no controlable si  $R = \sqrt{L/C}$ .

Veamos cómo aparece la posibilidad de pérdida de controlabilidad desde el punto de vista externo; analizamos la función transferencia. La calculamos de (6.25) con la fórmula conocida,

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [-1 \ 0] \begin{bmatrix} s + \frac{2}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{s(s + 2/RC) + 1/LC} [-1 \ 0] \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{2}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}} [-s \ -\frac{1}{C}] \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}} + 1 \\ &= \frac{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

Calculamos la raíces del polinomio denominador (el polinomio característico de la matriz  $A$ ) resolviendo la forma cuadrática, obteniendo

$$s_{1,2} = -\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Vemos que ambas raíces tienen parte real negativa, por lo que podemos concluir que el sistema será asintóticamente (y por ende, BIBO) estable para todo valor de  $R, L$  y  $C$ . En particular, si  $R = \sqrt{L/C}$  (valor de  $R$  para el cual el sistema deviene no controlable) tenemos

$$s_{1,2} = -\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{LC}} = -\frac{1}{RC}$$

es decir, dos raíces iguales. Para este valor de  $R$  la función transferencia queda

$$\hat{G}(s) = \frac{s \left( s + \frac{1}{RC} \right)}{\left( s + \frac{1}{RC} \right)^2} = \frac{s}{\left( s + \frac{1}{RC} \right)},$$

que es ahora un sistema *de primer orden*. Lo que sucede para este particular valor de  $R$  es que los elementos almacenadores de energía combinan sus efectos de tal manera que el sistema se comporta, desde el punto de vista externo, como un sistema de primer orden. La pérdida de controlabilidad y la cancelación de un par polo-cero en la función transferencia para este particular valor de  $R$  no es una coincidencia; como veremos en la sección siguiente, necesariamente debe haber cancelaciones en la función transferencia si el sistema es no controlable o no observable.

### 6.3. Descomposiciones Canónicas

En esta sección presentamos formas canónicas de las ecuaciones de estado que descomponen al sistema en sus partes controlables y no controlables y observables y no observables. Estas descomposiciones permiten establecer la relación entre controlabilidad y observabilidad y función transferencia, generalizando las observaciones que hicieramos en el Ejemplo 6.6. Estas descomposiciones muestran también cuándo una realización en espacio de estados es *mínima*.

Consideramos el sistema lineal y estacionario en ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \\ C &\in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times p}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sea  $\hat{x} = Px$ , donde  $P$  es una matriz no singular,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces la ecuación de estados

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{aligned} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \hat{A} &= PAP^{-1}, \hat{B} = PB, \\ \hat{C} &= CP^{-1}, \hat{D} = D, \end{aligned} \quad (6.27)$$

es equivalente a (6.26). Todas las propiedades de (6.26), incluyendo estabilidad, controlabilidad, y observabilidad, se preservan en (6.27). Además, como es fácil comprobar, tenemos que

$$\hat{C} = PC, \quad \hat{O} = OP^{-1}.$$

El siguiente resultado muestra que si el sistema (6.26) no es completamente controlable, es posible definir un sistema de orden reducido con igual función transferencia (es decir, equivalente a estado cero) y controlable.

**Teorema 6.7 (Descomposición controlable/no-controlable).** Sea el sistema (6.26) con matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}$  tal que

$$\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango} [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n_1 < n.$$

Sea la matriz  $n \times n$  de cambio de coordenadas

$$P^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{n_1} \quad \cdots \quad q_n]$$

donde las primeras  $n_1$  columnas son  $n_1$  columnas linealmente independientes de la matriz  $\mathcal{C}$ , y las restantes columnas se eligen arbitrariamente de forma que  $P$  sea no singular. Entonces la transformación de equivalencia  $\hat{x} = Px$  o  $x = P^{-1}\hat{x}$  lleva (6.26) a la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du, \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde  $\hat{A}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  y  $\hat{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times (n-n_1)}$  y la ecuación de estados de orden  $n_1$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c &= \hat{A}_c \hat{x}_c + \hat{B}_c u \\ \hat{y} &= \hat{C}_c \hat{x}_c + Du \end{aligned} \quad (6.29)$$

es controlable y tiene la misma función transferencia que (6.26).

*Demostración.* Por lo visto en § 3.4, la columna  $i$  de  $\hat{A}$  es la representación de  $Aq_i$  en la base  $\{q_1, \dots, q_{n_1}, \dots, q_n\}$ . Pero los vectores  $Aq_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n_1$  son linealmente dependientes del conjunto  $\{q_1, \dots, q_{n_1}\}$ , y linealmente independientes del conjunto  $\{q_{n_1+1}, \dots, q_n\}$ . Así la matriz  $\hat{A}$  tiene la forma mostrada en (6.28).

Las columnas de  $\hat{B}$  son la representación de las columnas de  $B$  con respecto a  $\{q_1, \dots, q_n\}$ . Ahora, las columnas de  $B$  dependen solamente del conjunto  $\{q_1, \dots, q_{n_1}\}$ , así que  $\hat{B}$  tiene la forma dada en (6.28).

Si  $\hat{\mathcal{C}}$  es la matriz de controlabilidad de (6.28), entonces  $\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango } \hat{\mathcal{C}} = n_1$ . Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_c & \hat{A}_c \hat{B}_c & \cdots & \hat{A}_c^{n_1} \hat{B}_c & \cdots & \hat{A}_c^{n-1} \hat{B}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{C}}_c & \hat{A}_c^{n_1} \hat{B}_c & \cdots & \hat{A}_c^{n-1} \hat{B}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $\hat{\mathcal{C}}_c = [\hat{B}_c \quad \hat{A}_c \hat{B}_c \quad \cdots \quad \hat{A}_c^{n_1-1} \hat{B}_c]$  es la matriz de controlabilidad de  $(\hat{A}_c, \hat{B}_c)$ . Puesto que las columnas de  $\hat{A}_c^k \hat{B}_c$  para  $k \geq n_1$  son linealmente dependientes de las columnas de  $\hat{\mathcal{C}}_c$ , la condición  $\text{rango } \mathcal{C} = n_1$  implica  $\text{rango } \hat{\mathcal{C}}_c = n_1$ . Así, la ecuación (6.29) es controlable.

Finalmente, mostramos que (6.29) tiene la misma matriz transferencia que (6.26), que es la misma que la de (6.28), pues (6.26) y (6.28) son algebraicamente equivalentes. No es difícil verificar que

$$\begin{bmatrix} sI - \hat{A}_c & -\hat{A}_{12} \\ 0 & s(-\hat{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - \hat{A}_c)^{-1} & M \\ 0 & (s(-\hat{A}_{\bar{c}}))^{-1} \end{bmatrix}$$

donde  $M = (sI - \hat{A}_c)^{-1} \hat{A}_{12} (sI - \hat{A}_{\bar{c}})^{-1}$ . Así, la matriz transferencia de (6.28) es

$$\begin{aligned} [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} sI - \hat{A}_c & -\hat{A}_{12} \\ 0 & s(-\hat{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ &= [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} (sI - \hat{A}_c)^{-1} & M \\ 0 & (s(-\hat{A}_{\bar{c}}))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ &= \hat{C}_c (sI - \hat{A}_c)^{-1} \hat{B}_c + D, \end{aligned}$$

que no es otra que la matriz transferencia de (6.29), completando la demostración.  $\square$

En la transformación de equivalencia  $\hat{x} = Px$ , el espacio de estados se descompone en dos subespacios fundamentales:

- el *subespacio controlable*, generado por todos los vectores en  $\hat{x}$  de la forma  $\begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ 0 \end{bmatrix}$ , y
- el *subespacio no controlable*, generado por todos los vectores en  $\hat{x}$  de la forma  $\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_c \end{bmatrix}$ .

Dado que (6.29) es controlable, la entrada  $u$  puede transferir el estado  $\hat{x}_c$  desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado. Sin embargo, la entrada no puede controlar a  $\hat{x}_{\bar{c}}$ , porque, como se ve de (6.28),  $u$  no afecta a  $\hat{x}_{\bar{c}}$  nio directamente, ni indeirectamente a través del estado  $\hat{x}_c$ . Eliminando los estado no controlables obtenemos una ecuación controlable de dimensión menor ( $n_1$ ) que es equivalente a estado cero a las ecuaciones de estado originales.

La descomposición del sistema en su partes controlables y no controlables puede hacerse en MATLAB con la función `ctrbf(A, B, C)`.

**Ejemplo 6.7 (Descomposición de un sistema no controlable).** Consideremos el sistema de tercer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 1] x \end{aligned} \quad (6.30)$$

Calculamos el rango de la matriz de controlabilidad del sistema,

$$\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango} [B \quad AB \quad A^2B] = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3,$$

por lo que (6.30) no es controlable. Elegimos como matriz de cambio de coordenadas las primeras dos columnas de  $\mathcal{C}$ , y la restante la elegimos linealmente independiente a estas dos,

$$P^{-1} = Q \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo  $\hat{x} = Px$  obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 2 \quad \vdots \quad 1] x \end{aligned}$$

y el sistema reducido controlable

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 2] x \end{aligned} \quad (6.31)$$

El sistema reducido (6.31) tiene la misma matriz transferencia que (6.30),

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2-2s+1} & \frac{2}{s-1} \end{bmatrix}.$$

En forma dual obtenemos la siguiente descomposición del sistema en sus partes observables y no-observables.

**Teorema 6.8 (Descomposición observable/no-observable).** Sea el sistema (6.26) con matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  tal que

$$\text{rango } \mathcal{O} = \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_2 < n.$$

Sea la matriz  $n \times n$  de cambio de coordenadas

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n_2} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

donde las primeras  $n_2$  filas son  $n_2$  filas linealmente independientes de la matriz  $\mathcal{O}$ , y las restantes filas se eligen arbitrariamente de forma que  $P$  sea no singular. Entonces la transformación de equivalencia  $\hat{x} = Px$  o  $x = P^{-1}\hat{x}$  lleva (6.26) a la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_\mathcal{O} \\ \hat{x}_\mathcal{C} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_\mathcal{O} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_\mathcal{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_\mathcal{O} \\ \hat{x}_\mathcal{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_\mathcal{O} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\hat{C}_\mathcal{O} \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_\mathcal{O} \\ \hat{x}_\mathcal{C} \end{bmatrix} + Du, \end{aligned} \tag{6.32}$$

donde  $\hat{A}_\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  y  $\hat{A}_\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{(n-n_2) \times (n-n_2)}$  y la ecuación de estados de orden  $n_2$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_\mathcal{O} &= \hat{A}_\mathcal{O} \hat{x}_\mathcal{O} + \hat{B}_\mathcal{O} u \\ \hat{y} &= \hat{C}_\mathcal{O} \hat{x}_\mathcal{O} + Du \end{aligned} \tag{6.33}$$

es observable y tiene la misma función transferencia que (6.26).  $\square$

En la transformación  $\hat{x} = Px$  el espacio de estados de orden  $n$  se divide en dos subespacios. El *subespacio observable*, de orden  $n_2$ , consiste de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_\mathcal{O} \\ 0 \end{bmatrix};$$

el otro subespacio, de orden  $n - n_2$ , es el *subespacio inobservable*, que consiste de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_\mathcal{C} \end{bmatrix}.$$

El estado  $\hat{x}_\mathcal{O}$  puede detectarse desde la salida, pero no así el  $\hat{x}_\mathcal{C}$ , como puede verse en (6.32). Eliminando los estados inobservables obtenemos el sistema (6.33) de orden  $n_2$ , que es equivalente a estado cero al original (tiene la misma función transferencia).

**Teorema 6.9 (Descomposición de Kalman).** Toda ecuación en variable de estados (6.26) puede llevarse, mediante una transformación de equivalencia, a la forma canónica

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{c\bar{o}} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{c\bar{o}} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{c\bar{o}} \\ \hat{x}_{c\bar{o}} \\ \hat{x}_{\bar{c}o} \\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{c\bar{o}} \\ \hat{B}_{\bar{c}\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6.34}$$

$$y = [\hat{C}_{c\bar{o}} \ 0 \ \hat{C}_{\bar{c}o} \ 0] \hat{x} + Du,$$

donde

- $\hat{x}_{c\bar{o}}$  : estados controlables y observables
- $\hat{x}_{c\bar{o}}$  : estados controlables pero no observables
- $\hat{x}_{\bar{c}o}$  : estados no controlables pero observables
- $\hat{x}_{\bar{c}\bar{o}}$  : estados no controlables ni observables.

Además, la ecuación de estados (6.26) es equivalente a estado cero a la ecuación controlable y observable

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} &= \hat{A}_{c\bar{o}}\hat{x}_{c\bar{o}} + \hat{B}_{c\bar{o}}u \\ \hat{y} &= \hat{C}_{c\bar{o}}\hat{x}_{c\bar{o}} + Du \end{aligned} \tag{6.35}$$

y tiene la matriz transferencia

$$\hat{G}(s) = \hat{C}_{c\bar{o}}(sI - \hat{A}_{c\bar{o}})^{-1}\hat{B}_{c\bar{o}} + D.$$

□

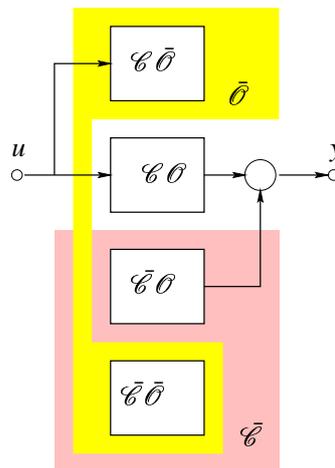


Figura 6.6: Descomposición de Kalman

Este teorema puede ilustrarse gráficamente como se muestra en la Figura 6.6. La ecuación (6.26) se descompone primero usando el Teorema 6.7 en sus partes controlables y no controlables. Luego descomponemos cada subecuación obtenida usando el Teorema 6.8 en sus partes observables y no observables.

Vemos en la Figura 6.6 que sólo la parte controlable y observable del sistema está conectada tanto a las entradas como a las salidas. Ésta es la única parte del sistema que determina la matriz transferencia, lo que muestra la razón de por qué la representación en matriz transferencia (externa) no es necesariamente equivalente a la representación en espacio de estados (interna). Los autovalores de las submatrices  $\hat{A}_{c\bar{o}}$ ,  $\hat{A}_{\bar{c}o}$ ,  $\hat{A}_{c\bar{o}}$  no aparecerán como polos de la matriz transferencia.

El sistema (6.35), tomado como realización de la matriz transferencia del sistema, es una *realización mínima*, puesto que no puede obtenerse otra realización de orden menor con la misma matriz transferencia. Toda realización mínima es controlable y observable y del mismo orden. En MATLAB puede calcularse con la función `minreal`.

**Ejemplo 6.8.** Tomemos el circuito de la Figura 6.7. El circuito tiene cuatro almacenadores de energía, por lo que podemos esperar una realización en ecuaciones de estados de orden 4. Analicemos primero el sistema desde el punto de vista físico. Dado que la entrada es una fuente de corriente, respuestas debidas a condiciones iniciales en  $L_1$  o  $C_1$  no aparecerán a la salida, por lo que las variables de estado asociadas  $x_1$  y  $x_2$  serán no observables (no podemos determinar sus condiciones iniciales a partir de observación de la entrada y la salida). De la forma similar, la variable de estado asociada a  $L_2$  será no controlable. Debido

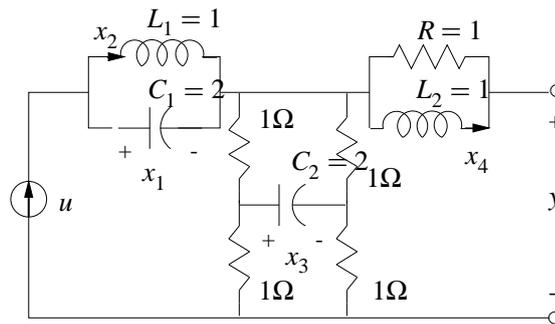


Figura 6.7: Circuito no controlable ni observable

a la simetría de los resistores de  $1\Omega$  en el puente, la variable de estado asociada al capacitor  $C_2$  no será ni controlable ni observable. Como vemos, la tensión de salida se reduce a  $y = 2(u/2) = u$ . La función transferencia del sistema es entonces una ganancia estática  $\hat{g}(s) = 1$ .

Veamos ahora al circuito analizando sus ecuaciones de estado. Asignando las variables de estado como se indicó, el circuito puede describirse por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] x + u$$

Puesto que la ecuación ya se encuentra en la forma canónica (6.28), el sistema puede redu-

irse a la realización controlable

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 0] x_c + u. \end{aligned}$$

La salida es independiente de  $x_c$ ; así la ecuación puede reducirse a

$$y = u,$$

que coincide con lo que ya habíamos visto en el análisis físico del circuito.

## 6.4. Condiciones en Ecuaciones en Forma Modal

La controlabilidad y la observabilidad son invariantes respecto a transformaciones de equivalencia. En particular, si transformamos el sistema a su *forma canónica modal*, es decir, aquella en la que la matriz  $\hat{A}$  está en su forma de Jordan, las condiciones para chequear controlabilidad y observabilidad se vuelven bastante simples. Consideremos las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Jx + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{6.36}$$

donde la matriz  $J$  está en forma de Jordan. Para simplificar la formulación del resultado, supongamos que  $J$  tiene sólo dos autovalores distintos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y que puede escribirse en la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{12} & 0 \\ 0 & 0 & J_{13} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} J_{21} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \tag{6.37}$$

donde las matrices  $J_{11}$ ,  $J_{12}$  y  $J_{13}$  son tres bloques de Jordan asociados al autovalor  $\lambda_1$ , y las matrices  $J_{21}$  y  $J_{22}$  son dos bloques de Jordan asociados al autovalor  $\lambda_2$ .

**Notación:** Denotamos la fila de  $B$  correspondiente a la *última fila* de  $J_{ij}$  como  $b_{uij}$ , y la columna de  $C$  correspondiente a la *primera columna* de  $J_{ij}$  como  $c_{pij}$ .

### Teorema 6.10 (Descomposición en forma modal).

1. La ecuación de estados (6.36) es controlable si y sólo si los tres vectores fila  $\{b_{u11}, b_{u12}, b_{u13}\}$  son linealmente independientes y los dos vectores fila  $\{b_{u21}, b_{u22}\}$  son linealmente independientes.
2. La ecuación de estados (6.36) es observable si y sólo si los tres vectores columna  $\{c_{p11}, c_{p12}, c_{p13}\}$  son linealmente independientes y los dos vectores columna  $\{c_{p21}, c_{p22}\}$  son linealmente independientes.

Antes de probar el Teorema 6.10, discutimos sus implicaciones y lo ilustramos con un ejemplo.

Si una ecuación de estados está en forma canónica modal, entonces la controlabilidad de las variables de estado asociadas a un mismo autovalor pueden chequearse por separado de las demás variables de estado, asociadas a otros autovalores. La controlabilidad de variables de estado asociadas a un mismo autovalor dependen *solamente* de las *filas* de la matriz  $B$  correspondientes a las *últimas filas* de los bloques de Jordan asociados a ese autovalor. Todas las demás filas de  $B$  son irrelevantes a la controlabilidad de esos modos. De forma similar, esta observación se aplica a la observabilidad de los estados asociados a un mismo autovalor, con la salvedad de que son las *columnas* de  $C$  correspondientes a las *primeras columnas* de los bloques de Jordan asociados al autovalor. Ilustramos con un ejemplo.

**Ejemplo 6.9 (Descomposición en forma modal).** Sea el sistema en forma canónica modal

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & [\lambda_1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & [\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$$y = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x.$$

La matriz  $J$  tiene dos autovalores distintos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . El autovalor  $\lambda_1$  tiene tres bloques de Jordan asociados, de órdenes 2, 1, 1. Las filas de  $B$  correspondientes a las últimas filas de estos bloques son

$$[1 \ 0 \ 0], \quad [0 \ 1 \ 0], \quad [1 \ 1 \ 1].$$

Las tres filas son linealmente independientes.

Asociado con  $\lambda_2$  hay sólo un bloque de Jordan, de orden 3. La fila de  $B$  correspondiente a la última fila del bloque es

$$[1 \ 1 \ 1],$$

que es no nulo, y por lo tanto linealmente independiente (la única forma que un conjunto de un solo vector sea linealmente dependiente es que sea nulo). Por el Teorema 6.10 concluimos que el sistema es controlable.

Las condiciones de observabilidad para (6.38) son que las tres columnas

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sean linealmente independientes, que lo son, y que la columna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sea linealmente independiente, que no lo es. Concluimos que el sistema (en particular el último modo  $\lambda_2$ ) no es observable.  $\square$

Vamos a dar una idea de la demostración del Teorema 6.10 sobre el sistema (6.38) del ejemplo anterior. Antes de ir a la demostración, veamos qué forma tiene el diagrama de bloques del sistema (6.38). Por la simplicidad de los bloques de Jordan, la inversa  $(sI - J)$  en (6.38) puede escribirse directamente (la antitransformada Laplace de  $e^{Jt}$ ) como

$$(sI - J)^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^3} \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Usando (6.39) podemos dibujar el diagrama de bloques de la Figura 6.8. Cada cadena de bloques corresponde a un bloque en (6.39); como hay cuatro bloques de Jordan, tenemos cuatro cadenas en el diagrama de bloques de la Figura 6.8.

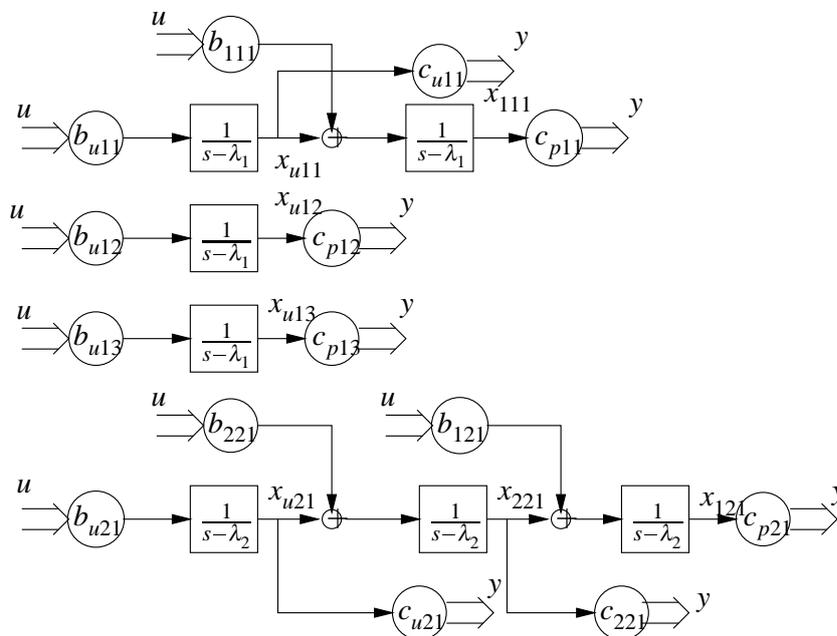


Figura 6.8: Diagrama de Bloques

La salida de cada bloque  $\frac{1}{s-\lambda_i}$  puede asignarse como variable de estados, como mostramos en la Figura 6.9.

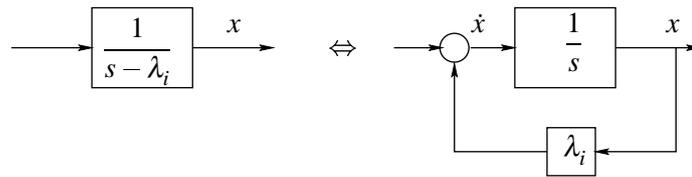


Figura 6.9: Estructura interna de  $\frac{1}{1-\lambda_i}$

Consideremos la última cadena de la Figura 6.8. Si  $b_{u21} = 0$ , la variable de estados  $x_{u21}$  no está conectada a la entrada y por lo tanto no es controlable, independientemente de los valores de  $b_{221}$  y  $b_{121}$ . Por otro lado, si  $b_{u21} \neq 0$ , entonces todas las variables de estado en la cadena son controlables. Si hay dos o más cadenas asociadas con el mismo autovalor, entonces requerimos la independencia lineal de los primeros vectores ganancia de esas cadenas. Las cadenas asociadas a distintos autovalores se pueden chequear por separado. Las mismas observaciones se aplican a la observabilidad, excepto que son los vectores columna  $c_{pij}$  los que juegan el rol de los vectores fila  $b_{uij}$ .

*Idea de la demostración del Teorema 6.10.* Mostramos el resultado sobre el sistema (6.38) usando el Test PBH de rango 6.2, que dice que  $(A, B)$  es controlable sii la matriz  $[sI - AB]$  tiene rango pleno para cada autovalor de  $A$ . O sea que tenemos

$$[sI - J \ B] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & -1 \\ 0 & s - \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{111} \\ b_{u11} \\ b_{u12} \\ b_{u13} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} s - \lambda_2 & -1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{121} \\ b_{221} \\ b_{u21} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{6.40}$$

La matriz  $J$  tiene dos autovalores distintos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , con tres y un bloques de Jordan asociados. Evaluando  $s = \lambda_1$  obtenemos

$$[\lambda_1 I - J \ B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{111} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 & b_{121} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & b_{221} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & b_{u21} \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

El rango de la matriz no cambia por operaciones elementales entre columnas o filas. Sumamos el producto de la segunda columna de (6.41) por  $b_{111}$  a la última columna de la matriz,

que da

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 & b_{121} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & b_{221} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & b_{u21} \end{bmatrix}.$$

Como  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son distintos,  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ . Sumamos el producto de la séptima columna por  $-b_{u21}/(\lambda_1 - \lambda_2)$  a la última columna. En forma similar, usamos la sexta, y luego la quinta columna para crear los tres últimos elementos de la última columna, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Es claro de (6.42) que la matriz tiene rango pleno si las filas  $b_{u11}$ ,  $b_{u12}$  y  $b_{u13}$  son linealmente independientes. Procediendo de igual forma para cada autovalor distinto podemos demostrar el teorema.  $\square$

**Ejemplo 6.10.** Consideremos las ecuaciones de estado en forma modal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 2] x. \end{aligned}$$

Hay dos bloques de Jordan, uno de orden 3 asociado al autovalor 0, y otro de orden 1 asociado al autovalor  $-2$ . La entrada de  $B$  correspondiente a la última fila del primer bloque de Jordan es 0; la ecuación de estado no es controlable. Las dos entradas de  $C$  correspondientes a las primeras columnas de los dos bloques de Jordan son no nulas; el sistema es observable.

## 6.5. Ecuaciones de Estado Discretas

Los conceptos y tests de controlabilidad y observabilidad para sistemas en tiempo discreto son análogos a los de tiempo continuo. Existen sin embargo dos diferencias importantes:

1. Si un sistema en tiempo continuo es controlable, existe una entrada que transfiere el estado del sistema entre dos estados cualesquiera en un intervalo de tiempo finito arbitrario, no importa cuán pequeño este intervalo de tiempo sea. En el caso de tiempo discreto, este intervalo de tiempo *no* es arbitrario; existe un *tiempo mínimo*  $\mu$ , tal que toda transferencia de estados debe necesariamente hacerse en un tiempo mayor o igual a  $\mu$ .

2. Para sistemas en tiempo continuo, si se puede llevar el estado al origen desde cualquier otro estado, siempre se puede hacer lo contrario: llevar el estado desde el origen a cualquier otro estado. En sistemas discretos esto no se cumple si la matriz  $A$  es singular.

Volveremos estas dos diferencias con un poco más de detalle en un momento. Resumimos primero las definiciones y principales tests de controlabilidad y observabilidad para sistemas en tiempo discreto.

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\y[k] &= Cx[k],\end{aligned}\tag{6.43}$$

con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ .

**Definición 6.3 (Controlabilidad de sistemas en tiempo discreto).** La ecuación de estados en tiempo discreto (6.43), o el par  $(A, B)$ , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial  $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una secuencia de entrada de longitud finita que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$ . En caso contrario, la ecuación (6.1), o el par  $(A, B)$ , se dice *no controlable*.

**Teorema 6.11 (Tests de Controlabilidad).** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , es controlable.
2. La *matriz de controlabilidad*,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np},\tag{6.44}$$

es de rango  $n$  (rango fila pleno).

3. La matriz  $n \times n$

$$W_{dc}[n-1] = \sum_{m=0}^{n-1} (A)^m B B^T (A^T)^m\tag{6.45}$$

es no singular.

4. La matriz  $[A - \lambda I \quad B] \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$  tiene rango fila pleno para cada autovalor  $\lambda$  de  $A$ .

**Definición 6.4 (Observabilidad de sistemas en tiempo discreto).** La ecuación de estado (6.43) es observable si para cualquier estado inicial  $x[0]$  (desconocido), existe número entero  $k_1 > 0$  tal que el conocimiento de la entrada  $u$  y la salida  $y$  desde  $k = 0$  a  $k_1$  es suficiente para determinar en forma única el estado inicial  $x[0]$ . En caso contrario el sistema no observable.

**Teorema 6.12 (Tests de Observabilidad).** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par  $(A, C)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , es observable.
2. La *matriz de observabilidad*,

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad O \in \mathbb{R}^{nq \times n},\tag{6.46}$$

es de rango  $n$  (rango columna pleno).

3. La matriz  $n \times n$

$$W_{do}[n-1] = \sum_{m=0}^{n-1} (A^T)^m C^T C (A)^m \quad (6.47)$$

es no singular.

4. La matriz  $\begin{bmatrix} A^{-\lambda I} \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$  tiene rango columna pleno para cada autovalor  $\lambda$  de  $A$ .

### 6.5.1. Índices de Controlabilidad y Observabilidad

Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{[n \times p]}$  tales que el par  $(A, B)$  es controlable. En consecuencia, la matriz  $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  tiene rango  $n$ . Claramente, "sobran" columnas en  $C$ , ya que hay  $np$ ; esto se debe a que hay más de una entrada y por lo tanto  $B$  tiene  $p$  columnas. Surge entonces la cuestión de si todas las columnas de  $B$  son necesarias, o bien, si todas aportan a la controlabilidad del sistema. Esta cuestión nos lleva al concepto de *índices de controlabilidad*, que en el caso de tiempo discreto tiene una interpretación física importante.

Para introducir los índices de controlabilidad del par  $(A, B)$ , veamos una forma eficiente y natural de seleccionar  $n$  columnas linealmente independientes de la matriz  $C$ . Si  $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$ , escribimos  $C$  en forma explícita como

$$C = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_p & : & Ab_1 & \dots & Ab_p & : & \dots & : & A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_p \end{bmatrix}$$

Busquemos columnas LI en  $C$  de izquierda a derecha. Por construcción, si durante la búsqueda  $A^i b_m$  resultara LD de las columnas a su izquierda, todas las columnas asociadas a  $b_m$  que siguen en  $C$  (o sea,  $A^{i+1}b_m, A^{i+2}b_m, \dots$ ) serán también LD de las columnas de  $C$  ya seleccionadas. Sea  $\mu_m$  el número de columnas LI en  $C$  aportadas por la columna  $b_m$  de  $B$ ; es decir, las columnas

$$b_m, Ab_m, \dots, A^{\mu_m-1}b_m$$

son LI en  $C$  y  $A^{\mu_m+i}b_m$  es LD para  $i = 0, 1, \dots$ . Si  $C$  tiene rango  $n$ , necesariamente debe cumplirse que

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = n.$$

**Definición 6.5 (Índices de Controlabilidad).** Los números  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  son los *índices de controlabilidad* asociados al par  $(A, B)$ . El número

$$\mu = \text{máx}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

es el *índice de controlabilidad* asociado al par  $(A, B)$ .

No es difícil comprobar que los índices de controlabilidad son invariantes frente a reordenamientos de las columnas de  $B$  o frente a cambios de coordenadas.

Para sistemas en tiempo discreto, el índice de controlabilidad  $\mu$  representa el tiempo mínimo en que se puede realizar cualquier transferencia de estados en un sistema controlable. No es posible transferir cualquier estado a otro con una secuencia de control de longitud menor a  $\mu$ .

Una definición dual, los *índices de observabilidad*,  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$ , surge de seleccionar las columnas LI en la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  asociadas a las filas de  $C$ . Sea  $\nu_m$  el número de filas LI en  $\mathcal{O}$  asociadas a la fila  $c_m$  de  $C$ . Se cumple que

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_q = n.$$

**Definición 6.6 (Índices de Observabilidad).** Los números  $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q\}$  son los *índices de observabilidad* asociados al par  $(A, C)$ . El número

$$\nu = \max(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q)$$

es el *índice de observabilidad* asociado al par  $(A, C)$ .

Como puede esperarse, los índices de observabilidad son también invariantes respecto a reordenamientos de las filas de  $C$  y respecto a cambio de coordenadas. En sistemas discretos, el índice de observabilidad  $\nu$  asociado al par  $(A, C)$  representa la longitud más corta de secuencias de entradas y salidas necesarias para determinar en forma unívoca el estado inicial del sistema.

Los tests de controlabilidad y observabilidad en formas canónicas y modal de sistemas en tiempo discreto son exactamente iguales a los de sistemas en tiempo continuo.

### 6.5.2. Controlabilidad al Origen y Alcanzabilidad

Existen en realidad tres definiciones aceptadas para controlabilidad, asociadas con la posibilidad de

1. transferir cualquier estado a cualquier estado (la que hemos presentado)
2. transferir cualquier estado al origen, llamada *controlabilidad al origen*, y
3. transferir el estado desde el origen a cualquier estado, llamada *controlabilidad desde el origen*, o *alcanzabilidad*.

Para sistemas lineales, estacionarios, y en tiempo continuo, las tres definiciones son equivalentes — por eso vimos sólo la primera. Para sistemas lineales, estacionarios, y en tiempo discreto, si la matriz  $A$  es no singular, de nuevo, las tres definiciones son equivalentes. sin embargo, si  $A$  es singular, el sistema puede ser no controlable según 1, pero controlable según 2. Por ejemplo, tomemos el sistema

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]. \quad (6.48)$$

La matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango 1, por lo que (6.48) es no controlable. Sin embargo, para cualquier  $x[0] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ , la entrada  $u[0] = 2\alpha + \beta$  transfiere  $x[0]$  a  $x[1] = 0$ , en un paso. Notar que  $A$  en (6.48) es singular.

## 6.6. Controlabilidad, Observabilidad y Muestreo

La mayoría de los sistemas de control se implementan en forma digital, para lo cual casi siempre se necesita disponer de un modelo en tiempo discreto del sistema. En §4.2.2 vimos una forma de obtener un modelo en EE discreto exacto en los instantes de muestreo.

Cabe entonces preguntarse si las propiedades de controlabilidad y observabilidad se conservarán en el modelo discretizado. En esta sección vemos una condición suficiente para que esto suceda.

Sea el sistema en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{6.49}$$

Si la entrada es seccionalmente constante a intervalos regulares  $T$ ,

$$u(t) = u(kT) \triangleq u[k], \quad \text{para } t \in [kT, (k+1)T),$$

entonces, como vimos en §4.2.2, el estado en el instante  $(k+1)T$  puede expresarse como

$$\begin{aligned}x[k+1] &\triangleq x((k+1)T) = A_d x[k] + B_d u[k], \\ y[k] &= Cx[k]\end{aligned}\tag{6.50}$$

donde

$$A_d \triangleq e^{AT}, \quad B_d \triangleq \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B.\tag{6.51}$$

Si el sistema en tiempo continuo (6.49) es controlable (observable), la controlabilidad (observabilidad) del sistema discretizado (6.50), (6.51) depende del período de muestreo  $T$  y de los autovalores  $\lambda_i$  de la matriz  $A$ .

**Teorema 6.13 (Muestreo no patológico).** Supongamos que el sistema (6.49) es controlable (observable). El sistema discretizado (6.50), (6.51) con período de muestreo  $T$  es controlable (observable) si, dados dos autovalores cualesquiera  $\lambda_i, \lambda_j$  de  $A$  tales que  $\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0$ , se satisface la condición de muestreo no patológico

$$\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j] \neq \frac{2\pi m}{T}, \quad \text{con } m = 1, 2, \dots\tag{6.52}$$

Si el sistema (6.49) es de una entrada, la condición (6.52) es también necesaria para controlabilidad (observabilidad) del sistema (6.50), (6.51).

El teorema da una condición suficiente para garantizar que el sistema discretizado sea controlable (observable) si el continuo lo es. Esta condición sólo afecta a autovalores complejos conjugados de  $A$ ; si  $A$  sólo tiene autovalores reales, entonces el sistema discretizado es siempre controlable (observable) para todo  $T > 0$  si el sistema continuo lo es. Si  $A$  tiene autovalores complejos conjugados  $\alpha \pm j\beta$ , entonces si el período de muestreo  $T$  es tal que *no* sea múltiplo de  $\pi/\beta$ , el sistema discreto es controlable (observable) si el continuo lo es. Si  $T = m\pi/\beta$  para algún entero  $m$ , entonces el sistema discreto puede no ser controlable (observable).

**Ejemplo 6.11.** Consideremos el sistema de una entrada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y supongamos que la matriz  $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  es invertible (o sea, el sistema es controlable). La condición de controlabilidad para el sistema discretizado es que la matriz

$$C_d = \begin{bmatrix} \underbrace{\int_0^T e^{A\tau} d\tau B}_{B_d} & \underbrace{e^{AT} \int_0^T e^{A\tau} d\tau B}_{A_d B_d} & \dots & \underbrace{e^{(n-1)AT} \int_0^T e^{A\tau} d\tau B}_{A_d^{n-1} B_d} \end{bmatrix}\tag{6.53}$$

sea invertible. Es claro que si existieran dos números enteros  $q$  y  $r$  tales que  $e^{qAT} = e^{rAT}$ , entonces (6.53) no podrá ser invertible. Por ejemplo, tomemos

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Obtenemos el sistema discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} \cos T & \text{sen } T \\ -\text{sen } T & \cos T \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \text{sen } T \end{bmatrix} u[k] \quad (6.54)$$

Puede comprobarse fácilmente que si  $T = m\pi$ , con  $m = 1, 2, \dots$ , entonces el sistema discreto (6.54) será no controlable. Si agregamos la salida

$$y(t) = [1 \ 0] x(t),$$

para los mismos valores de  $T$  se pierde observabilidad en el sistema discretizado.

**Ejemplo 6.12.** Consideremos el sistema hidráulico de la Figura 6.10. Es obvio que  $u(t)$  no puede afectar a  $x_2(t)$ , por lo que es intuitivamente evidente que el sistema es no controlable. Un modelo en EE linealizado de este sistema, con parámetros unitarios [Rugh, 1995,

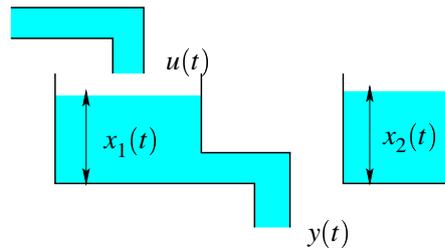


Figura 6.10: Sistema de tanques desconectados

Ejemplo 6.18], es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

y muestra que es no controlable (está en forma canónica modal).

**Ejemplo 6.13.** El sistema hidráulico de la Figura 6.11 no es tan obvio como el de la Figura 6.10, aunque puede verse que  $x_1(t)$  y  $x_3(t)$  no pueden ser afectadas en forma independiente por  $u(t)$ . La ecuación de estados linealizada, con parámetros unitarios, es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 1 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

y da la matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

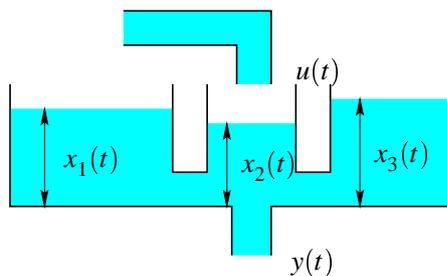


Figura 6.11: Sistema de tanques en paralelo

que tiene rango 2.

Por otro lado, si la entrada se aplicara en el primer tanque, como se muestra en la Figura 6.12, el sistema se vuelve controlable; la matriz de controlabilidad con  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  deviene

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que tiene rango 3.

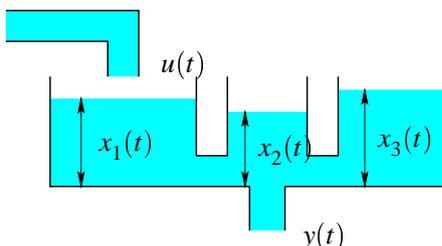


Figura 6.12: Sistema controlable de tanques en paralelo

## 6.7. Sistemas Inestacionarios

Consideramos el sistema de  $n$  estados,  $p$  entradas y  $q$  salidas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x. \end{aligned} \tag{6.55}$$

La ecuación de estados (6.55) es controlable en  $t_0$  si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que para cualquier  $x(t_0) = x_0$  y cualquier  $x_1$ , existe una entrada que transfiere  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo  $t_1$ . De lo contrario el sistema es no controlable en  $t_0$ .

Para sistemas estacionarios, si la ecuación de estados es controlable, entonces es controlable en todo  $t_0$  y para cualquier  $t_1 > t_0$ . En el caso inestacionario la especificación de  $t_0$  y  $t_1$  es crucial.

**Teorema 6.14 (Controlabilidad de sistemas inestacionarios).** El par  $(A(t), B(t))$  es controlable en un tiempo  $t_0$  si y sólo si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que la matriz

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau, \quad W_c(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6.56)$$

donde  $\Phi(t, \tau)$  es la matriz de transición de estados de  $\dot{x} = A(t)x$ , es no singular.

Para aplicar el Teorema 6.14 necesitamos la matriz de transición de estados  $\Phi(t, \tau)$ , que podemos no conocer. Es deseable entonces tener algún test de controlabilidad que no dependa del conocimiento de  $\Phi(t, \tau)$ . Esto es posible si pedimos más condiciones en las matrices  $A(t)$  y  $B(t)$ .

Supongamos que  $A(t)$  y  $B(t)$  son continuamente diferenciables  $(n - 1)$  veces. Definimos entonces la siguiente secuencia de matrices

$$\begin{aligned} M_0(t) &= B(t) \\ M_{m+1}(t) &= -A(t)M_m(t) + \frac{d}{dt}M_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6.57)$$

**Teorema 6.15 (Condición suficiente para controlabilidad de sistemas inestacionarios).** Sean  $A(t)$  y  $B(t)$  continuamente diferenciables  $(n - 1)$  veces. Entonces el par  $(A(t), B(t))$  es controlable en un tiempo  $t_0$  si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que

$$\text{rango} [M_0(t_1) \quad M_1(t_1) \quad \dots \quad M_{n-1}(t_1)] = n. \quad (6.58)$$

*Demostración.* Mostramos que si vale (6.58) entonces la matriz  $W_c(t_0, t)$  es no singular para todo  $t \geq t_1$ , con lo cual se cumple la condición del Teorema 6.14. Supongamos que  $W_c(t_0, t)$  es singular, es decir que es semidefinida positiva para algún  $t_2 \geq t_1$ . Entonces existe un vector constante  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\begin{aligned} v^T W_c(t_0, t_2) v &= \int_{t_0}^{t_2} v^T \Phi(t_2, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) v d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_2} \|B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) v\|^2 d\tau = 0, \end{aligned} \quad (6.59)$$

lo cual implica que

$$B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) v \equiv 0, \quad \text{o bien, } v^T \Phi(t_2, \tau) B(\tau) \equiv 0 \text{ para todo } \tau \in [t_0, t_2]. \quad (6.60)$$

Notemos que, por su definición en (6.57),  $M_0(t)$  verifica

$$\Phi(t_2, t) B(t) = \Phi(t_2, t) M_0(t).$$

Usando la propiedad

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t_2, t) = -\Phi(t_2, t) A(t)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(t_2, t) B(t)) &= \Phi(t_2, t) \left( -A(t) M_0(t) + \frac{d}{dt} M_0(t) \right) \\ &= \Phi(t_2, t) M_1(t). \end{aligned}$$

Siguiendo con la diferenciación, podemos mostrar que

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \Phi(t_2, t) B(t) = \Phi(t_2, t) M_m(t). \quad (6.61)$$

Volviendo a (6.59), diferenciamos  $v^T \Phi(t_2, \tau) B(\tau) \equiv 0$  con respecto a  $\tau$ , y usando (6.61), obtenemos

$$v^T \Phi(t_2, \tau) M_m(\tau) \equiv 0, \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.62)$$

y para todo  $\tau \in [t_0, t_2]$ , en particular en  $\tau = t_1$ . Podemos reescribir (6.62) evaluada en  $\tau = t_1$  como

$$v^T \Phi(t_2, t_1) [M_0(t_1) \quad M_1(t_1) \quad \dots \quad M_{n-1}(t_1)] = 0. \quad (6.63)$$

Como  $\Phi(t_2, t_1)$  es no singular,  $v^T \Phi(t_2, t_1) \neq 0$ . Así (6.63) contradice (6.58), lo cual demuestra el teorema.  $\square$

**Ejemplo 6.14.** Consideremos el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Como  $A(t)$  y  $B(t)$  son continuamente diferenciables todas las veces que se quiera, calculamos

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ M_1(t) &= -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} \\ M_2(t) &= -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t) = \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \\ t^2 - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El determinante de la matriz

$$[M_0 \quad M_1 \quad M_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t^2 \\ 1 & -t & t^2 - 1 \end{bmatrix}$$

es  $t^2 + 1$ , que es distinto de cero para todo  $t$ . Así el sistema es controlable en todo  $t$ .  $\square$

Vayamos ahora a la observabilidad de sistemas inestacionarios. La ecuación de estados (6.55) es observable en  $t_0$  si existe un tiempo finito  $t_1$  tal que para cualquier estado  $x(t_0) = x_0$  el conocimiento de la entrada y la salida sobre el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  es suficiente para determinar unicamente el estado inicial  $x_0$ . De lo contrario el sistema es no observable en  $t_0$ .

**Teorema 6.16 (Observabilidad de sistemas inestacionarios).** El par  $(A(t), C(t))$  es observable en un tiempo  $t_0$  si y sólo si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que la matriz

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau, \quad W_o(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6.64)$$

donde  $\Phi(t, \tau)$  es la matriz de transición de estados de  $\dot{x} = A(t)x$ , es no singular.

La siguiente es una condición suficiente para observabilidad que prescinde del conocimiento de la matriz de transición de estados  $\Phi(t, \tau)$ .

**Teorema 6.17 (Condición suficiente para observabilidad de sistemas inestacionarios).** Sean  $A(t)$  y  $C(t)$  continuamente diferenciables  $(n - 1)$  veces. Entonces el par  $(A(t), C(t))$  es observable en un tiempo  $t_0$  si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \dots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n, \quad (6.65)$$

donde

$$N_0 = C(t) \\ N_{m+1} = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, n - 1.$$

**Nota:** La dualidad entre controlabilidad y observabilidad que tenemos en sistemas lineales estacionarios (Teorema 6.4) *no* se aplica a sistemas inestacionarios. Debe usarse la siguiente forma alterada.

**Teorema 6.18 (Dualidad controlabilidad-observabilidad en sistemas inestacionarios).** El par  $(A(t), B(t))$  es controlable en  $t_0$  si y sólo si el par  $(-A^T(t), B^T(t))$  es observable en  $t_0$ .

*Demostración.* Ejercicio. □

## 6.8. Ejercicios

**Ejercicio 6.1.** Terminar la prueba del Lema 6.1.

**Ejercicio 6.2.** Terminar la prueba del Lema 6.2.

**Ejercicio 6.3.** Determinar si cada uno de los siguientes sistemas es controlable y/o observable

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] &= [5 \ 1] x[k] \end{aligned} \quad (a)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad (b)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1] \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 1] x \end{aligned} \quad (d)$$

**Ejercicio 6.4.** ¿Para qué valores de  $\alpha$  la EE

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

es controlable? ¿Y observable?

**Ejercicio 6.5.** Es cierto que el rango de  $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  es igual al rango de  $[AB \ A^2B \ \dots \ A^nB]$ ? Sino, ¿bajo qué condiciones es verdad?

**Ejercicio 6.6.** Reducir la ecuación de estados

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 1] x(t)$$

a una EE controlable. ¿Es la ecuación reducida observable?

**Ejercicio 6.7.** Reducir la EE

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] x(t)$$

a una EE controlable y observable.

**Ejercicio 6.8.** ¿Es la ecuación siguiente en forma de Jordan controlable y observable?

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

**Ejercicio 6.9.** Chequear controlabilidad y observabilidad de los siguientes sistemas

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{a}$$

$$y = [0 \ 1] x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u \tag{b}$$

$$y = [0 \ e^{-t}] x$$

**Ejercicio 6.10.** Probar el Teorema 6.18.

# Bibliografía

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Pub. Co., 1992.
- B. Friedland. *Control System Design*. McGraw-Hill, 1986.
- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2000.
- G.C. Goodwin and K.S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- Ricardo Sánchez Peña. *Introducción a la teoría de control robusto*. Asociación Argentina de Control Automático, 1992.
- M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.
- C.F. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(3):395–404, June 1978.