

1. La Figura 1 muestra el esquema de un sistema de dos masas  $M_1$  y  $M_2$  acopladas por un resorte de constante  $K$ . La función transferencia entre la fuerza  $u$  y las posiciones de las masas  $y_1$  e  $y_2$  es

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + K/M_2}{s^2(s^2 + K/\bar{M})} \\ \frac{K/M_2}{s^2(s^2 + K/\bar{M})} \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{M} = \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^{-1}.$$

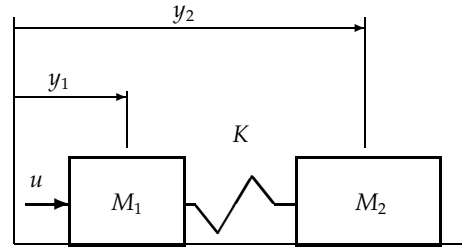


Figura 1: Sistema de masas acopladas

Todas las constantes son positivas.

20%

- (a) Obtener una realización en espacio de estados de  $G(s)$ .

20%

- (b) Determinar la estabilidad interna y entrada salida del sistema.

2. Un satélite en órbita alrededor de la tierra puede modelarse como un punto de masa unitaria moviéndose en un plano bajo una fuerza de atracción hacia el origen inversamente proporcional al cuadrado del radio. Si el satélite puede aplicar fuerzas de propulsión  $u_1(t)$  en la dirección radial y  $u_2(t)$  en la dirección tangencial (ver Figura 2), las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{\beta}{r^2(t)} + u_1(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{u_2(t)}{r(t)}$$

donde  $\beta$  es una constante.

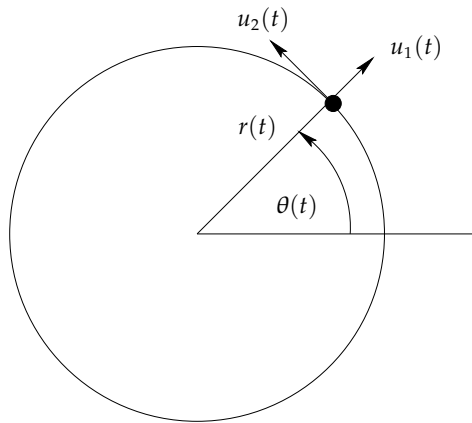


Figura 2: Masa unitaria en órbita gravitacional

10%

- (a) Encontrar la trayectoria nominal  $\tilde{r}(t)$ ,  $\tilde{\theta}(t)$  correspondiente a  $\tilde{u}_1(t) = 0 = \tilde{u}_2(t)$  y condiciones iniciales

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0,$$

$$\text{donde } \omega_0 = \sqrt{\beta/r_0^3}.$$

20%

- (b) Obtener una representación en ecuaciones de estado del sistema y luego linealizarla alrededor de la trayectoria nominal.

3. Dado el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [2 \quad 3] x(t)$$

- 15% (a) Obtener la expresión de la respuesta  $y(t)$  a un escalón unitario.
- 15% (b) Obtener las ecuaciones diferencia del sistema discretizado en forma exacta con período de muestreo  $T > 0$ .