Capítulo 5

Estabilidad de Sistemas Perturbados

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x) \tag{5.1}$$

donde $f : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ y $g : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ son seccionalmente continuas en t y localmente Lipschitz en x en $[0,\infty) \times D$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. Pensamos a (5.1) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{5.2}$$

El término de perturbación $g(t,x)$ puede provenir de errores de modelado, envejecimiento, incertidumbres, etc. Típicamente no conocemos el término $g(t,x)$ pero tenemos alguna información sobre él, como por ejemplo una cota superior $\|g(t,x)\|$. La representación *aditiva* de la perturbación en (5.1) modela, por ejemplo, perturbaciones que no modifican el orden del sistema.

Supongamos que el sistema nominal (5.2) tiene un PE uniformemente AE en el origen. ¿Qué podemos decir acerca de la estabilidad del sistema perturbado (5.1)? Una forma natural de encarar esta cuestión es la de usar una función de Lyapunov del sistema nominal como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado. Esto es lo que hicimos con el análisis de la linealización en la §3.4. El elemento nuevo ahora es que el término de perturbación puede ser mucho más general que en el caso de linealización. Vamos a analizar el caso en que el término de perturbación se anula en el origen, es decir $g(t,0) = 0$, de forma que el origen $x = 0$ sigue siendo un PE del sistema perturbado. El caso $g(t,0) \neq 0$ requiere un análisis más elaborado y no lo vamos a considerar en general en este curso. Sí vamos a presentar un caso particular de perturbación que no necesariamente se anula en el origen para introducir el concepto de estabilidad entrada-estado (ISS).

5.1. Perturbación de un PE Exponencialmente Estable

Supongamos entonces que $g(t,0) = 0$ y que $x = 0$ es un PE *exponencialmente* estable del sistema nominal (5.2). Sea $V(t,x)$ una función de Lyapunov que satisface

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq c_2\|x\|^2 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c_3\|x\|^2 \tag{5.4}$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq c_4\|x\| \tag{5.5}$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ y para ciertas constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4. La existencia de una función de Lyapunov que satisface (5.3)-(5.5) está garantizada por el Teorema 4.7, con algunas hipótesis adicionales. Supongamos además que el término de perturbación $g(t, x)$ satisface la *cota de crecimiento lineal*

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\| , \quad \forall t \geq 0 , \quad \forall x \in D \tag{5.6}$$

donde γ es una constante no negativa. La propiedad (5.6) es natural dadas las hipótesis que hicimos sobre $g(t, x)$. Como $g(t, x)$ se anula en el origen y es localmente Lipschitz en un entorno acotado del origen, entonces es fácil de probar que satisface (5.6) en dicho entorno. Usamos V como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado (5.1). Planteamos

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x).$$

Usando (5.4)-(5.6), acotamos $\dot{V}$ de la siguiente manera

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \gamma \|x\|^2.$$

Si γ es lo suficientemente pequeña tal que satisface la cota

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \tag{5.7}$$

entonces

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - c_4 \gamma) \|x\|^2 < 0 , \quad \forall x \in D - \{0\}.$$

Por lo tanto, usando el Corolario 4.6, podemos probar el siguiente lema.

Lema 5.1 (Estabilidad exponencial robusta). Sea $x = 0$ un PE exponencialmente estable del sistema nominal (5.2). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (5.3)-(5.5) en $[0, \infty) \times D$. Supongamos que el término de perturbación $g(t, x)$ satisface (5.6)-(5.7). Entonces el origen es un PE exponencialmente estable del sistema perturbado (5.1). Más aún, si las hipótesis valen globalmente, entonces el origen es globalmente exponencialmente estable. ◦

Este lema es conceptualmente importante porque muestra que la estabilidad exponencial del origen es *robusta* con respecto a una clase de perturbaciones que satisface (5.6)-(5.7). Para poder enunciar esta propiedad de robustez no es necesario conocer $V(t, x)$ explícitamente, sólo hace falta saber que el origen es un PE exponencialmente estable del sistema nominal, porque entonces, usando el Teorema 4.7 (asumiendo además que la matriz Jacobiana $\partial f / \partial x$ es acotada), podemos garantizar la existencia de una $V(t, x)$ que satisface (5.3)-(5.5). Sin embargo, si no conocemos a $V(t, x)$ explícitamente, entonces no podemos calcular la cota (5.7), en cuyo caso sólo podemos decir que el origen es exponencialmente estable para toda perturbación que satisface (5.6) con γ suficientemente pequeña.

Ejemplo 5.1. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + g(t, x)$$

donde A es Hurwitz y $g(t,x)$ satisface (5.6) con $D = \mathbb{R}^n$. Sea $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$ y calculemos la solución P de la ecuación de Lyapunov $PA + A^{\mathrm{T}}P = -Q$. Por el Teorema 3.10 sabemos que hay una única solución $P = P^{\mathrm{T}} > 0$. La función de Lyapunov cuadrática $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ satisface (5.3)-(5.5). En particular,

$$\lambda_{min}(P)\|x\|_2^2 \leq x^{\mathrm{T}}Px \leq \lambda_{max}(P)\|x\|_2^2$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}Ax = -x^{\mathrm{T}}Qx \leq -\lambda_{min}(Q)\|x\|_2^2$$
$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|_2 = \|2x^{\mathrm{T}}P\|_2 \leq 2\|P\|_2\|x\|_2 = 2\lambda_{max}(P)\|x\|_2.$$

La derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema satisface

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q)\|x\|_2^2 + 2\lambda_{max}(P)\gamma\|x\|_2^2.$$

Por lo tanto el origen es globalmente exponencialmente estable si

$$\gamma < \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)} \tag{5.8}$$

Esta cota depende de la elección de Q, sin embargo el máximo del lado derecho de (5.8) se obtiene para $Q = I$ (ver el Ejercicio 5.1 de Khalil, 1996). ∘

Ejemplo 5.2. Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3$$

donde la constante $\beta \geq 0$ es desconocida. Este sistema tiene la forma (5.1) con

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta x_2^3. \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son $-1 \pm j\sqrt{3}$, por lo tanto A es Hurwitz. La solución de la ecuación de Lyapunov $PA + A^{\mathrm{T}}P = -I$ es

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix}$$

La función de Lyapunov $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ satisface (5.4)-(5.5) con $c_3 = 1$ y

$$c_4 = 2\lambda_{max}(P) = 3{,}026$$

El término de perturbación $g(x)$ satisface

$$\|g(x)\|_2 = \beta|x_2|^3 \leq \beta k_2^2|x_2| \leq \beta k_2^2\|x\|_2$$

para todo $|x_2| \leq k_2$, donde k_2 es una constante que vamos a determinar después, porque a esta altura no sabemos una cota para $x_2(t)$, aunque sí sabemos que estará acotada cuando la trayectoria $x(t)$ se mueva dentro de un conjunto compacto. Usando $V(x)$ como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado, obtenemos

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|_2^2 + 3{,}026\,\beta k_2^2\|x\|_2^2$$

Por lo tanto, $\dot{V}(x)$ es definida negativa si

$$\beta < \frac{1}{3{,}026\, k_2^2} \tag{5.9}$$

Para estimar una cota de k_2, sea $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$. Para cualquier constante positiva c, el conjunto Ω_c es cerrado y acotado. La frontera de Ω_c es la superficie de nivel

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = c$$

El mayor valor de $|x_2|$ sobre la superficie $V(x) = c$ se puede determinar derivando la ecuación de la superficie con respecto a x_1 e igualando a cero. Esto da

$$3x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0$$

Por lo tanto, los valores extremos de x_2 se obtienen en la intersección de la recta $x_1 = -x_2/12$ con la superficie de nivel. Haciendo esto da un máximo para x_2^2 de $96\,c/29$. Por lo tanto, todos los puntos en el interior de Ω_c satisfacen la cota

$$|x_2| \leq k_2 \quad \text{donde} \quad k_2^2 = \frac{96\,c}{29}$$

Entonces, usando (5.9), si

$$\beta < \frac{29}{96\,c \times 3{,}026} \approx \frac{0{,}1}{c} \tag{5.10}$$

$\dot{V}(x)$ será definida negativa en Ω_c y podemos concluir que el origen $x = 0$ es exponencialmente estable, siendo Ω_c una estima de la RA.

Vamos a aprovechar este ejemplo para mostrar que la cota (5.7) puede ser muy conservadora. Usando esa cota, llegamos a la desigualdad (5.9). Esta desigualdad permite al término de perturbación $g(t,x)$ ser cualquier vector de dos componentes que satisfaga $\|g(t,x)\|_2 \leq \beta k_2^2 \|x\|_2$. Esta clase de perturbaciones es más general que la perturbación específica que tenemos en este problema. Aquí tenemos una *perturbación estructurada* en el sentido de que la primera componente de g es siempre cero, mientras que nuestro análisis permitía *perturbaciones no estructuradas* donde el vector g puede cambiar en todas las direcciones. No tener en cuenta la estructura de la perturbación lleva en general a resultados conservadores.

Repitamos el análisis, esta vez teniendo en cuenta la estructura de la perturbación. Volvemos a calcular la derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= -\|x\|_2^2 + 2x^{\mathsf{T}} P g(x) \\
&= -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 (\frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2) \\
&\leq -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 (\frac{1}{16}\|x\|_2^2 + \frac{5}{16}\|x\|_2^2) \\
&\leq -\|x\|_2^2 + \frac{3}{4}\beta k_2^2 \|x\|_2^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V}(x)$ es definida negativa si $\beta < 4/(3k_2^2)$. Usando otra vez el hecho de que para todo $x \in \Omega_c$, $|x_2|^2 \leq k_2^2 = \frac{96\,c}{29}$, llegamos a la cota

$$\beta < \frac{0{,}4}{c}$$

que es cuatro veces mayor que (5.10). ◦

5.2. Perturbación de un PE Uniformemente AE

Cuando el origen del sistema nominal (5.2) no es exponencialmente estable sino sólo uniformemente AE, el análisis se hace más complicado. Supongamos que el sistema nominal tiene una función de Lyapunov definida positiva y decreciente $V(t,x)$ que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x)$$

para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times D$, donde $W_3(x)$ es definida positiva y continua. La derivada de $V(t,x)$ sobre las trayectorias del sistema (5.1) satisface

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \le -W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \right\|$$

Para lograr que $\dot{V}(t,x)$ sea definida negativa necesitamos probar que

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \right\| < W_3(x)$$

para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times D$. Es claro que esto requiere que pongamos una cota a $\|g(t,x)\|$ que va a depender de la naturaleza de la función de Lyapunov del sistema nominal. Una clase de funciones de Lyapunov para las cuales el análisis es tan simple como para el caso de estabilidad exponencial es el caso en que $V(t,x)$ es definida positiva, decreciente, y satisface

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3 \phi^2(x) \tag{5.11}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le c_4 \phi(x) \tag{5.12}$$

para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times D$, para ciertas constantes positivas c_3 y c_4, y donde $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida positiva y continua. Una función de Lyapunov que satisface (5.11)-(5.12) se denomina *tipo-cuadrática*. Es claro que una función de Lyapunov que satisface (5.3)-(5.5) es de tipo cuadrática, pero una función de Lyapunov tipo cuadrática puede existir aunque el origen no sea exponencialmente estable (ver Ejemplo 5.3 más abajo).

Si el sistema nominal (5.2) tiene una función de Lyapunov tipo cuadrática, entonces su derivada sobre las trayectorias del sistema (5.1) satisface

$$\dot{V}(t,x) \le -c_3 \phi^2(x) + c_4 \phi(x) \|g(t,x)\|$$

Supongamos ahora que el término de perturbación satisface la cota

$$\|g(t,x)\| \le \gamma \phi(x)\,, \quad \gamma < \frac{c_3}{c_4}$$

Entonces

$$\dot{V}(t,x) \le -(c_3 - \gamma c_4) \phi^2(x)$$

lo que muestra que $\dot{V}(t,x)$ es definida negativa.

Ejemplo 5.3. Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3 + g(t, x)$$

El sistema nominal $\dot{x} = -x^3$ tiene un PE globalmente AE en el origen, pero como vimos en el Ejemplo 4.6, el origen no es exponencialmente estable. Por lo tanto no existe una función de Lyapunov que satisfaga (5.3)-(5.5). La función de Lyapunov $V(x) = x^4$ satisface (5.11)-(5.12) con $\phi(x) = |x|^3$ y $c_3 = c_4 = 4$. Supongamos que el término de perturbación satisface la cota $|g(t, x)| \leq \gamma |x|^3$ para todo x, con $\gamma < 1$. Entonces la derivada de $V(t, x)$ sobre las trayectorias del sistema perturbado satisface

$$\dot{V}(t, x) \leq -4(1 - \gamma)x^2$$

Por lo tanto, el origen es un PE globalmente uniformemente AE del sistema perturbado. ◦

En contraste con el caso de estabilidad exponencial, es importante remarcar que un sistema nominal con un PE en el origen uniformemente AE, pero no exponencialmente estable, *no es robusto* a perturbaciones con cotas de crecimiento lineal arbitrariamente pequeñas del tipo (5.6). Vemos esto con un ejemplo.

Ejemplo 5.4. Consideremos el sistema del ejemplo anterior con $g(x) = \gamma x$, $\gamma > 0$, es decir

$$\dot{x} = -x^3 + \gamma x$$

Se puede ver fácilmente, mediante linealización, que para cualquier $\gamma > 0$, sin importar cuan chico sea, el origen es inestable. ◦

5.3. Estabilidad Entrada-Estado

Consideremos ahora el sistema con entrada

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{5.13}$$

donde $f : [0, \infty) \times D \times D_u \to \mathbb{R}^n$ es seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x y u, $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene a $x = 0$, y $D_u \subset \mathbb{R}^m$ es un dominio que contiene a $u = 0$. La entrada $u(t)$ es una función acotada y seccionalmente continua de t para todo $t \geq 0$. Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \tag{5.14}$$

tiene un PE UAE en el origen $x = 0$. Una forma de analizar el comportamiento entrada-estado del sistema forzado (5.13), es considerar a (5.13) como una perturbación del sistema no forzado (5.14), donde el término de perturbación es

$$f(t, x, u) - f(t, x, 0)$$

Esto lo vamos a hacer para la propiedad de estabilidad entrada-estado (Input to State Stability, ISS) definida a continuación.

Definición 5.1 (Estabilidad Entrada-Estado, ISS). El sistema (5.13) es *localmente estable entrada-estado* si existen una función β de clase $\mathcal{KL}$, una función γ de clase $\mathcal{K}$, y constantes positivas k_1 y k_2 tales que, para cualquier estado inicial $x(t_0)$ con $\|x(t_0)\| < k_1$ y cualquier entrada $u(t)$ con $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2$, la solución $x(t)$ existe y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \right) \tag{5.15}$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Es *estable entrada-estado* si $D = \mathbb{R}^n$, $D_u = \mathbb{R}^m$, y la desigualdad (5.15) se satisface para cualquier estado inicial $x(t_0)$ y cualquier entrada acotada $u(t)$. $\circ$

La desigualdad (5.15) garantiza que para cualquier entrada acotada $u(t)$, el estado $x(t)$ se va a mantener acotado. Más aún, cuando t aumenta, el estado $x(t)$ va a tener una cota final que es una función clase $\mathcal{K}$ de $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$. Puede probarse que si $u(t)$ converge a cero cuando $t \to \infty$, también lo hace $x(t)$. Como, con $u(t) \equiv 0$, (5.15) se reduce a

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$$

ISS local implica que el origen del sistema no forzado es UAE, mientras que ISS implica que es GUAE.

El siguiente teorema tipo Lyapunov da una condición suficiente para ISS.[1]

Teorema 5.2. Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$, $D_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| < r_u\}$, y $f : [0, \infty) \times D \times D_u \to \mathbb{R}^n$ seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x y u. Sea $V : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|), \qquad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0$$

$\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y ρ son funciones clase $\mathcal{K}$. Entonces el sistema (5.13) es localmente ISS con $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$, $k_1 = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, y $k_2 = \rho^{-1}(\text{mín}\{k_1, \rho(r_u)\})$. Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$, $D_u = \mathbb{R}^m$, y α_1 es clase $\mathcal{K}_\infty$, entonces (5.13) es ISS con $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$. $\circ$

Los siguientes Lemas son consecuencia de los teoremas conversos de Lyapunov.

Lema 5.3 (Estabilidad asintótica uniforme e ISS). Supongamos que en algún entorno de $(x, u) = (0, 0)$, la función $f(t, x, u)$ es continuamente diferenciable y las matrices Jacobianas $[\partial f / \partial x]$ y $[\partial f / \partial u]$ están acotadas, uniformemente en t. Si el sistema no forzado (5.14) tiene un PE UAE en el origen $x = 0$, entonces el sistema (5.14) es localmente ISS.

Demostración. Por el Teorema 4.9 (converso de Lyapunov), el sistema no forzado (5.14) tiene una función de Lyapunov $V(t, x)$ que satisface las desigualdades (4.9) en algún entorno acotado de $x = 0$. Como $[\partial f / \partial u]$ está acotada, el término de perturbación satisface

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L \|u\|, \quad L > 0 \tag{5.16}$$

para todo $t \geq t_0$ y todo (x, u) en algún entorno acotado de $(x, u) = (0, 0)$. Puede verificarse que $V(t, x)$ satisface las condiciones del Teorema 5.2 en algún entorno acotado de $(x, u) = (0, 0)$. $\square$

[1] Para sistemas estacionarios se ha mostrado que las condiciones del Teorema 5.2 son también necesarias (Sontag and Wang, 1995).

Para sistemas estacionarios, las hipótesis del Lema 5.3 de que los Jacobianos estén acotados se satisfacen trivialmente si $f(x,u)$ es continuamente diferenciable. Por lo tanto, para *sistemas estacionarios* el Lema dice que *si* $f(x,u)$ *es continuamente diferenciable y el origen de* (5.14) *es AE, entonces* (5.13) *es localmente ISS.*

Lema 5.4 (Estabilidad exponencial e ISS). Supongamos que $f(t,x,u)$ es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz en (x,u), uniformemente en t. Si el sistema no forzado (5.14) tiene un PE globalmente exponencialmente estable en el origen $x=0$, entonces el sistema (5.13) es ISS.

Demostración. Por el Teorema 4.9 (converso de Lyapunov), el sistema no forzado (5.14) tiene una función de Lyapunov $V(t,x)$ que satisface las desigualdades (4.9) globalmente. Como f es globalmente Lipschitz en (x,u), el término de perturbación satisface (5.16) para todo $t \geq t_0$ y todo (x,u). Puede verificarse que $V(t,x)$ satisface las condiciones del Teorema 5.2 globalmente. □

Si el origen del sistema no forzado (5.14) es GUAE pero no globalmente exponencialmente estable, el sistema (5.13) no es necesariamente ISS incluso cuando f es globalmente Lipschitz en (x,u) (Ver el Ejercicio 5.19 de Khalil, 1996).

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del Teorema 5.2.

Ejemplo 5.5. El sistema

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

tiene un PE GAE en el origen cuando $u=0$. Tomando $V = x^2/2$, tenemos

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1-\theta)\,x^4 - \theta x^4 + xu \leq -(1-\theta)\,x^4\,, \quad \forall |x| \geq \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{1/3}$$

donde θ es una constante tal que $0 < \theta < 1$. Probamos entonces que el sistema es ISS con $\gamma(a) = (a/\theta)^{1/3}$. ○

Ejemplo 5.6. El sistema

$$\dot{x} = f(x,u) = -x - 2x^3 + (1+x^2)u^2$$

tiene un PE globalmente exponencialmente estable en el origen cuando $u=0$, pero el Lema 5.4 no se aplica porque f no es globalmente Lipschitz en x. Sin embargo, tomando $V = x^2/2$ obtenemos

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1+x^2)u^2 \leq -x^4\,, \quad \forall |x| \geq u^2$$

Por lo tanto el sistema es ISS con $\gamma(a) = a^2$. ○

Ejemplo 5.7. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x,u) = -x + (1+x^2)u$$

Como en el ejemplo anterior, cuando $u=0$ el origen es un PE exponencialmente estable, pero el Lema 5.4 no se aplica porque f no es globalmente Lipschitz en x. En este case puede verse que el sistema no es ISS tomando $u(t) \equiv 1$, ya que la solución del sistema resultante

$$\dot{x} = -x + x^2$$

que comienza en $x(0) = 0$ diverge a infinito (notar que $\dot{x} \geq 3/4$ para todo x). De acuerdo al Lema 5.3, el sistema es localmente ISS. El Teorema 5.2 puede usarse para estimar las cotas del estado inicial y la entrada (las constantes k_1 y k_2 de la Definición 5.1). Sea $D = \{|x| < r\}$ y $D_u = R$. Con $V(x) = x^2/2$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= -x^2 + x(1 + x^2)u \\
&\leq -(1 - \theta)x^2 - \theta x^2 + |x|(1 + r^2)|u| \\
&\leq -(1 - \theta)x^2 , \quad \forall \frac{(1 + r^2)|u|}{\theta} \leq |x| < r
\end{aligned}
$$

donde $0 < \theta < 1$. Por lo tanto, el sistema es localmente ISS con $k_1 = r$, $k_2 = r\theta/(1 + r^2)$, y $\gamma(a) = a(1 + r^2)/\theta$. $\circ$

Bibliografía

Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.

Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.

Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.

Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.

Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.

Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.

Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.

Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.

Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.

Sontag, E.D. and Y. Wang (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters* **24**, 351–359.

van der Schaft, A. J. (2000). *L_2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.

Índice alfabético