

## Capítulo 6

# Estabilidad Entrada-Salida

Hasta ahora estuvimos trabajando con descripciones de sistemas en el espacio de estado. En el enfoque de espacio de estados trabajamos con ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u),\end{aligned}$$

donde  $u$ ,  $y$  y  $x$  son las variables de entrada, salida, y estado, respectivamente. Un enfoque alternativo para modelar matemáticamente un sistema dinámico es el enfoque de entrada-salida. Un modelo de entrada-salida relaciona la salida del sistema directamente con la entrada, sin importar la estructura interna del sistema representada por la ecuación de estado. El sistema es considerado como una caja negra a la que sólo puede accederse a través de sus terminales de entrada y salida.

### 6.1. Señales y Sistemas como Operadores

Consideramos sistemas cuya relación entrada-salida está representada por

$$y = H u$$

donde  $H$  es un *mapeo u operador* que especifica  $y$  en términos de  $u$ . Así como una función mapea un valor de la variable en un valor de la imagen, los operadores con los que vamos a trabajar mapean señales en señales, donde una señal es una función (vectorial) del tiempo. La entrada  $u$  pertenece entonces a un espacio de señales, que se suele tomar como un espacio lineal normado  $\mathcal{L}^m$  de funciones  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ .<sup>1</sup> Por ejemplo, el *espacio de funciones uniformemente acotadas*,  $\mathcal{L}_\infty^m$ , con la norma<sup>2</sup>

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$$

y el *espacio de funciones seccionalmente continuas de cuadrado integrable*,  $\mathcal{L}_2^m$ , con la norma

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)u(t) dt} < \infty.$$

<sup>1</sup>La notación  $\mathcal{L}^m$  indica que las funciones son a valores en  $\mathbb{R}^m$ . A veces simplificaremos a  $\mathcal{L}$  cuando las dimensiones estén claras del contexto, o sean irrelevantes.

<sup>2</sup>Notar que una cosa es la norma  $\|u(t)\|$ , tomando a  $u(t)$  como un vector en  $\mathbb{R}^m$ , y otra es la norma de  $u$  como elemento de un espacio funcional. Marcamos la diferencia notando esta última con  $\|u\|_{\mathcal{L}}$  cuando no esté claro del contexto.

Más generalmente, el espacio  $\mathcal{L}_p^m$  con  $1 \leq p < \infty$  se define como el conjunto de funciones seccionalmente continuas  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left( \int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Se puede verificar que  $\mathcal{L}_p^m$ , para cada  $p \in [1, \infty]$ , es un espacio lineal normado.

Suele referirse a la norma  $\mathcal{L}_2$  de una señal como la *energía* de la señal. Esta interpretación es una generalización del concepto físico de energía. Por ejemplo, si  $u$  representa la corriente eléctrica por un resistor de  $1\Omega$ , entonces la *potencia eléctrica instantánea* disipada por el resistor es igual a  $\|u(t)\|^2$  y la energía es la raíz cuadrada de la integral de ésta, es decir,

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt}.$$

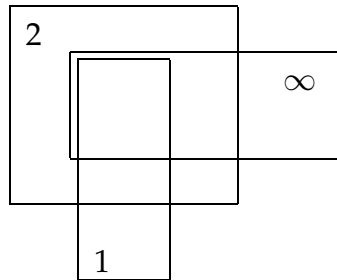


Figura 6.1: Relación entre los espacios funcionales  $\mathcal{L}$

El diagrama de Venn de la Figura 6.1 muestra la relación de inclusiones entre los espacios de señales  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_\infty$ . Es fácil ver que hay funciones en  $\mathcal{L}_\infty$  que no están en  $\mathcal{L}_2$ , como por ejemplo un escalón

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t. \end{cases}$$

En cambio, la señal

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1/\sqrt{t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

pertenece a  $\mathcal{L}_1$ , ya que

$$\|u\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2,$$

pero no pertenece a  $\mathcal{L}_2$ , ya que la integral de  $1/t$  es divergente en el intervalo  $[0, 1]$ . Tampoco pertenece a  $\mathcal{L}_\infty$ , ya que no es acotada.

Si  $u \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_\infty$ , entonces  $u \in \mathcal{L}_2$ , como se ilustra en el diagrama. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt &= \int_0^\infty \|u(t)\| \|u(t)\| dt \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| \int_0^\infty \|u(t)\| dt \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \|u\|_{\mathcal{L}_1} \end{aligned}$$

## 6.2. Estabilidad $\mathcal{L}$

Si pensamos que  $u \in \mathcal{L}^m$  es una señal «buena», una pregunta natural es si la salida  $y$  será también «buena» en el sentido de que  $y \in \mathcal{L}^q$ , donde  $\mathcal{L}^q$  es el mismo espacio lineal normado que  $\mathcal{L}^m$ , sólo que el número de variables de salida  $q$  es, en general, diferente del número de variables de entrada  $m$ . Un sistema que tiene la propiedad de mapear señales «buenas» en señales «buenas» se define como un sistema *estable*. Para poder tratar sistemas *inestables*, tenemos que definir al operador  $H$  actuando entre espacios más generales que los  $\mathcal{L}$ , de forma que una entrada que pertenezca a  $\mathcal{L}^m$  tenga la posibilidad de generar una salida que no pertenezca a  $\mathcal{L}^q$ . Por lo tanto,  $H$  suele definirse como un mapeo entre un espacio extendido  $\mathcal{L}_e^m$  y un espacio extendido  $\mathcal{L}_e^q$ , donde

$$\mathcal{L}_e^m = \{u \mid u_\tau \in \mathcal{L}^m, \forall \tau \geq 0\}$$

donde  $u_\tau$  es un *truncamiento* de  $u$  definido como

$$u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

El espacio extendido  $\mathcal{L}_e^m$  es un espacio lineal que contiene al espacio no extendido  $\mathcal{L}^m$  como subconjunto. Permite tratar señales no acotadas que crecen indefinidamente con el tiempo. Por ejemplo, la señal  $u(t) = t$  no pertenece al espacio  $\mathcal{L}_\infty$ , pero su truncamiento pertenece a  $\mathcal{L}_\infty$  para todo  $\tau$  finito. Por lo tanto  $u(t) = t$  pertenece al espacio extendido  $\mathcal{L}_{\infty e}$ .

Un mapeo  $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$  es *causal* si el valor de la salida  $(Hu)(t)$  en cada  $t$  depende sólo de valores de la entrada hasta el tiempo  $t$ . Esto es equivalente a

$$(Hu)_\tau = (Hu_\tau)_\tau$$

La causalidad es una propiedad intrínseca de todo sistema dinámico representado por un modelo en espacio de estados.

Ahora que tenemos definidos los espacios de señales de entrada y salida podemos definir *estabilidad entrada-salida*.

**Definición 6.1 (Estabilidad Entrada-Salida).** Un mapeo  $H : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$  es  $\mathcal{L}$  estable si existe una función  $\alpha$  de clase  $\mathcal{K}$ , definida en  $[0, \infty)$ , y una constante no-negativa  $\beta$  tal que

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}}) + \beta \quad (6.1)$$

para toda  $u \in \mathcal{L}_e^m$  y  $\tau \in [0, \infty)$ . El mapeo es  $\mathcal{L}$  estable con ganancia finita si existen constantes no-negativas  $\gamma$  y  $\beta$  tales que

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta \quad (6.2)$$

para toda  $u \in \mathcal{L}_e^m$  y  $\tau \in [0, \infty)$ . ◦

Cuando un sistema satisface la desigualdad (6.2), suele ser importante calcular el mínimo valor de  $\gamma$  para el cual existe  $\beta$  tal que (6.2) se satisface. Cuando este valor existe y es finito lo llamamos la *ganancia* del sistema. Cuando (6.2) se satisface para algún  $\gamma \geq 0$ , decimos que el sistema tiene ganancia  $\mathcal{L}$  menor o igual que  $\gamma$ .

Para sistemas causales y  $\mathcal{L}$  estables tenemos que

$$u \in \mathcal{L}^m \implies Hu \in \mathcal{L}^q, \quad \text{y} \quad \|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(\|u\|_{\mathcal{L}}) + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m,$$

y si el sistema tiene ganancia finita,

$$\|Hu\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\|u\|_{\mathcal{L}} + \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}^m.$$

**Ejemplo 6.1 (Función Estática).** Una función estática (sin dinámica, como la función  $\text{sat}(\cdot)$ )  $h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  puede verse como un operador  $H$  que asigna a cada señal de entrada  $u(t)$  la señal de salida  $y(t) = h(t, u(t))$ . Por ejemplo, si  $h$  satisface

$$|h(t, u)| \leq a|u|, \quad \forall t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}$$

con alguna constante positiva  $a$ , entonces para cada  $p \in [1, \infty]$ , el operador  $H$  es  $\mathcal{L}$  estable con ganancia finita y satisface (6.2) con  $\gamma = a$  y  $\beta = 0$ .

Ahora supongamos que

$$h(u) = u^2.$$

Como

$$\sup_{t \geq 0} |h(u(t))| \leq \left( \sup_{t \geq 0} |u(t)| \right)^2$$

entonces  $H$  es  $\mathcal{L}_\infty$  estable con  $\alpha(r) = r^2$  y  $\beta = 0$ . Notemos que  $H$  no es  $\mathcal{L}_\infty$  estable con ganancia finita porque la función  $h(u) = u^2$  no puede acotarse con una recta de la forma  $|h(u)| \leq \gamma|u| + \beta$  en todo el eje real.  $\circ$

**Ejemplo 6.2 (Operador de Convolución).** Sea

$$y(t) = \int_0^t h(t - \sigma)u(\sigma) d\sigma$$

donde  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ . Supongamos que  $h \in \mathcal{L}_1$ ; es decir,

$$\|h\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |h(\sigma)| d\sigma < \infty \tag{6.3}$$

Si  $u \in \mathcal{L}_{\infty e}$ , entonces, para todo  $\tau \in [0, \infty)$  y  $t \leq \tau$ ,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |h(t - \sigma)||u(\sigma)| d\sigma \\ &\leq \int_0^t |h(t - \sigma)| d\sigma \sup_{0 \leq \sigma \leq \tau} |u(\sigma)| = \int_0^t |h(s)| ds \sup_{0 \leq \sigma \leq \tau} |u(\sigma)| \\ &\leq \int_0^\infty |h(s)| ds \sup_{0 \leq \sigma \leq \tau} |u(\sigma)| = \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \end{aligned}$$

Tomando el supremo para todo  $t \leq \tau$  en el lado izquierdo, obtenemos

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \forall \tau \in [0, \infty)$$

Comparando con (6.2), vemos que el sistema es  $\mathcal{L}_\infty$  estable con ganancia finita, con  $\gamma = \|h\|_{\mathcal{L}_1}$  y  $\beta = 0$ . Más aún, puede probarse (Khalil, 1996, pp. 265–266) que la condición (6.3) en realidad garantiza estabilidad  $\mathcal{L}_p$  con ganancia finita para cada  $p \in [1, \infty]$ , es decir

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|h\|_{\mathcal{L}_1} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}, \quad \forall \tau \in [0, \infty).$$

◊

**Ejemplo 6.3 (Sistema Lineal Estacionario).** Sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

donde  $A$  es Hurwitz. La salida está dada por

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Para cada  $x_0$  fijo, la expresión de arriba define un operador  $H$  que a cada señal  $u(t)$  le asigna una señal  $y(t)$ . Como  $A$  es Hurwitz, sabemos que

$$\|e^{At}\| \leq ke^{-at}, \quad \forall t \geq 0,$$

con  $k$  y  $a$  ciertas constantes positivas. Por lo tanto,

$$\|y(t)\| \leq k_1 e^{-at} + k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau + k_3 \|u(t)\|, \quad (6.4)$$

donde

$$k_1 = k\|C\|\|x_0\|, \quad k_2 = k\|B\|\|C\|, \quad k_3 = \|D\|.$$

Definamos las señales

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k_1 e^{-at} \\ y_2(t) &= k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau \\ y_3(t) &= k_3 \|u(t)\|. \end{aligned}$$

Supongamos que  $u \in \mathcal{L}_{pe}^m$  con  $p \in [1, \infty]$ . Acotamos la norma de  $y_1(t)$  como

$$\begin{aligned} \|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_\infty} &\leq k_1 \\ \|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}_p} &\leq k_1 \left(\frac{1}{ap}\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \end{aligned}$$

Para la norma de  $y_2(t)$  usamos los resultados del ejemplo anterior:

$$\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq \frac{k_2}{a} \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}$$

Para la norma de  $y_3(t)$ , es fácil de ver que

$$\|y_{3\tau}\|_{\mathcal{L}_p} \leq k_3 \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p}$$

Usando la desigualdad triangular para la norma de  $y(t)$  en (6.4), tenemos que (6.2) se satisface con

$$\gamma = k_3 + \frac{k_2}{a}, \quad \beta = \begin{cases} k_1 & p = \infty \\ k_1 \left(\frac{1}{ap}\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Por lo tanto el sistema lineal estacionario  $(A, B, C, D)$ , con una matriz  $A$  Hurwitz, es  $\mathcal{L}_p$  estable con ganancia finita para cada  $p \in [1, \infty]$ . Notar que el término de «corrimiento»  $\beta$  es proporcional a la norma de la condición inicial  $\|x_0\|$ . Cuando  $x_0 = 0$  la ecuación (6.2) se satisface con  $\beta = 0$ .  $\circ$

### 6.3. Estabilidad $\mathcal{L}$ en Variable de Estado

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & x(0) &= x_0 \\ y &= h(t, x, u) \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $(x, u)$ ;  $h : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  es seccionalmente continua en  $t$  y continua en  $(x, u)$ . Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fijo, el modelo de estado (6.5) define un operador  $H$  que a cada señal de entrada  $u(t)$  asigna una señal de salida  $y(t)$ . Supongamos que  $x = 0$  es un PE del sistema no forzado

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \tag{6.6}$$

El tema de esta sección es mostrar que si el origen de (6.6) es exponencialmente estable, entonces, bajo algunas hipótesis sobre  $f$  y  $h$ , el sistema (6.5) es  $\mathcal{L}_p$  estable. Tenemos entonces el siguiente resultado.

**Teorema 6.1 (Estabilidad Exponencial  $\implies$  Estabilidad  $\mathcal{L}$ ).** Consideremos el sistema (6.5) donde  $f$  es seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $(x, u)$ , y  $h$  es seccionalmente continua en  $t$  y continua en  $(x, u)$ . Supongamos además que

1. El origen  $x = 0$  es un PE globalmente exponencialmente estable de (6.6), y existe una función de Lyapunov  $V(t, x)$  que satisface

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) &\leq -c_3 \|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq c_4 \|x\| \end{aligned} \tag{6.7}$$

para todo  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  y ciertas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ .

2. Las funciones  $f$  y  $h$  satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} \|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| &\leq L\|u\| \\ \|h(t, x, u)\| &\leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\| \end{aligned} \quad (6.8)$$

para todo  $(t, x, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y ciertas constantes no negativas  $L$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$ .

Entonces, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , el sistema (6.5) es  $\mathcal{L}_p$  estable con ganancia finita para cada  $p \in [1, \infty]$ . En particular, para cada  $u \in \mathcal{L}_{pe}^m$ , la salida  $y(t)$  satisface

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_p} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_p} + \beta \quad (6.9)$$

para todo  $\tau \in [0, \infty)$ , donde la ganancia  $\gamma$  y el corrimiento  $\beta$  están dados por

$$\gamma = \eta_2 + \frac{\eta_1 c_2 c_4 L}{c_1 c_3}, \quad \beta = \begin{cases} \eta_1 \|x_0\| \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} & p = \infty \\ \eta_1 \|x_0\| \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left(\frac{2c_2}{c_3 p}\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \end{cases}$$

*Demostración.* La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (6.5) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \\ &\leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| L \|u\|. \end{aligned}$$

Definamos la función auxiliar  $W(t) = \sqrt{V(t, x(t))}$ . Veamos primero que  $\dot{W}(t)$  satisface la desigualdad

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{c_3}{c_2}\right) W + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|. \quad (6.10)$$

En efecto, si  $V(t) \neq 0$  entonces  $\dot{W} = \dot{V}/(2\sqrt{V}) = \dot{V}\sqrt{V}/(2V)$ . Usando las desigualdades en la primer línea de (6.7) y la cota que ya obtuvimos para  $\dot{V}$  obtenemos (6.10).

Si  $V(t) = 0$ ,  $\dot{W}(t)$  no está definida. Sin embargo, puede mostrarse que  $\dot{W}(t)$  está bien definida como *derivada por derecha*<sup>3</sup> y que en ese caso

$$\dot{W} \leq \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \|u(t)\|,$$

y como  $W(t) = 0$  cuando  $V(t) = 0$ , concluimos que (6.10) vale para todos los valores de  $V(t)$ .

Ahora, usando el Principio de Comparación (Lema 2.11) en (6.10) obtenemos

$$W(t) \leq e^{-at} W(0) + \frac{c_4 L}{2\sqrt{c_1}} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau,$$

donde hemos denotado  $a = c_3/(2c_2)$ . Reemplazando  $W$  por  $\sqrt{V}$  y usando de nuevo las desigualdades en la primer línea de (6.7), llegamos a que

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \|x_0\| e^{-at} + \frac{c_4 L}{2c_1} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau.$$

<sup>3</sup>Tomando límite por derecha en la definición de la derivada, ver detalles en (Khalil, 1996, Apéndice A1).

Finalmente, usando la desigualdad para  $h$  en (6.8) obtenemos a la cota para la salida  $y$

$$\|y(t)\| \leq k_1 e^{-at} + k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau + k_3 \|u(t)\|, \quad (6.11)$$

donde

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|x_0\| \eta_1, \quad k_2 = \frac{c_4 L \eta_1}{2c_1}, \quad k_3 = \eta_2.$$

Notemos que la desigualdad (6.11) es precisamente la desigualdad (6.4) del Ejemplo 6.3. Así, repitiendo lo que hicimos en el Ejemplo 6.3 llegamos a (6.9) y concluimos la prueba.  $\square$

**Ejemplo 6.4.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - x^3 + u, & x(0) &= x_0 \\ y &= \tanh x + u \end{aligned}$$

El origen de

$$\dot{x} = -x - x^3$$

es globalmente exponencialmente estable, como puede probarse usando la función de Lyapunov  $V(x) = x^2/2$ . La función  $V$  satisface (6.7) con  $c_1 = c_2 = 1/2$ ,  $c_3 = c_4 = 1$ . Las funciones  $f$  y  $h$  satisfacen (6.8) globalmente con  $L = \eta_1 = \eta_2 = 1$ . Por lo tanto, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $p \in [0, \infty]$ , el sistema es  $\mathcal{L}_p$  estable con ganancia finita.  $\circ$

**Ejemplo 6.5.** Consideremos el sistema de segundo orden con una entrada y una salida

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - a \tanh x_1 + u \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

donde  $a$  es una constante no negativa. El sistema no forzado puede considerarse como una perturbación del sistema lineal y estacionario

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como  $A$  es Hurwitz, resolvemos la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -I$ , que da

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

y usamos  $V(x) = x^T P x$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema no lineal sin entrada. Calculamos la derivada

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 - ax_1 \tanh x_1 - 2ax_2 \tanh x_1.$$

Como  $x_1 \tanh x_1 \geq 0$  para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\dot{V} \leq -\|x\|_2^2 + 2a|x_1||x_2| \leq -(1-a)\|x\|_2^2.$$

Así, para todo  $a < 1$ , nuestra candidata  $V$  satisface (6.7) globalmente con  $c_1 = \lambda_{\min}(P)$ ,  $c_2 = \lambda_{\max}(P)$ ,  $c_3 = 1 - a$ ,  $c_4 = 2\|P\|_2 = 2\lambda_{\max}(P)$ . Las funciones  $f$  y  $h$  satisfacen (6.8) globalmente con  $L = \eta_1 = 1$ ,  $\eta = 0$ . Concluimos que, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $p \in [1, \infty]$ , el sistema es  $\mathcal{L}_p$  estable con ganancia finita.  $\circ$



## 6.4. Ganancia $\mathcal{L}_2$

La estabilidad  $\mathcal{L}_2$  juega un rol especial en el análisis de sistemas, puesto que es natural trabajar con señales de cuadrado integrable que pueden verse como señales de «energía» finita. En muchos problemas de control se requiere que el efecto de una entrada de perturbación sobre la salida sea pequeño. Con entradas en  $\mathcal{L}_2$ , el objetivo de control es asegurar que el sistema sea  $\mathcal{L}_2$  estable con ganancia finita y minimizar la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema. En esta sección vemos como calcular la ganancia  $\mathcal{L}_2$  o una cota superior de la misma. Comenzamos con sistemas lineales estacionarios.

**Teorema 6.2 (Ganancia  $\mathcal{L}_2$  de un Sistema Lineal Estacionario).** Sea el sistema lineal estacionario

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

donde  $A$  es Hurwitz. Sea  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , la función transferencia del sistema. Entonces la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema es

$$\gamma = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(j\omega)\|_2$$

donde  $\|G(j\omega)\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}[G^T(-j\omega)G(j\omega)]}$  es la norma 2 inducida de la matriz compleja  $G(j\omega)$ .

*Demostración.* Tomamos  $x(0) = 0$ , ya que la ganancia  $\gamma$  no depende de  $x(0)$  (ver el Ejemplo 6.3). De la teoría de transformada de Fourier, sabemos que para una señal  $y \in \mathcal{L}_2$  (definida nula para  $t < 0$ ), la transformada de Fourier  $Y(j\omega)$  es

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \text{y además} \quad Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

Vamos a usar el Teorema de Parseval, que dice que para  $y \in \mathcal{L}_2$ ,

$$\int_0^{\infty} \|y(t)\|_2^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|Y(j\omega)\|_2^2 d\omega.$$

Entonces, usando el Teorema de Parseval podemos escribir

$$\begin{aligned}\|y\|_{\mathcal{L}_2} &= \int_0^{\infty} \|y(t)\|_2^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|Y(j\omega)\|_2^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega)Y(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(j\omega)G^*(j\omega)G(j\omega)U(j\omega) d\omega \\ &\leq \left[ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(j\omega)\|_2 \right]^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|U(j\omega)\|^2 d\omega \\ &= \left[ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|_2 \right]^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2},\end{aligned}$$

lo que muestra que la ganancia  $\mathcal{L}_2$  es menor o igual que (6.12). La prueba de que es exactamente igual a (6.12) se hace por un argumento de contradicción y puede verse en Khalil (1996, Apéndice A.9).  $\square$

Para sistemas lineales estacionarios de una entrada y una salida (es decir, con función transferencia escalar), la ganancia  $\mathcal{L}_2$  es simplemente

$$\gamma = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|, \quad (6.12)$$

o sea, el máximo valor del módulo de  $G(j\omega)$ , es decir, el máximo pico en el diagrama de Bode de magnitud de  $G(s)$ .

El caso de sistemas lineales estacionarios es excepcional, en el sentido de que podemos calcular la ganancia  $\mathcal{L}_2$  en forma exacta. En casos más generales sólo podemos obtener una cota superior, como en el siguiente teorema.

**Teorema 6.3 (Ganancia  $\mathcal{L}_2$  de un Sistema No Lineal Afín en la Entrada).** Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u & x(0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $f$  es localmente Lipschitz,  $g$  y  $h$  son continuas. Sea  $\gamma$  un número positivo y supongamos que existe una función continuamente diferenciable y definida positiva  $V(x)$  que satisface la *desigualdad de Hamilton-Jacobi*

$$\mathcal{H}(V, f, g, h, \gamma) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (6.14)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , el sistema (6.13) es  $\mathcal{L}_2$  estable con ganancia finita y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  es menor o igual que  $\gamma$ .

*Demostración.* Para la prueba completamos cuadrados usando la identidad

$$a^T b = -\frac{\gamma^2}{2} \left\| b - \frac{1}{\gamma^2} a \right\|_2^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|b\|_2^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \|a\|_2^2. \quad (6.15)$$

Planteamos  $\dot{V}(x)$ , la derivada de  $V(x)$  a lo largo de las trayectorias de (6.13), y usamos la identidad (6.15) con  $a^T = (\partial V / \partial x) g$  y  $b = u$ . Así,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial x} g u \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f - \frac{\gamma^2}{2} \left\| u - \frac{1}{\gamma^2} g^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right\|_2^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g g^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{\gamma^2}{2} \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Usando (6.14) e  $y = h(x)$  tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \frac{\gamma^2}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{2} \|y\|_2^2 - \frac{\gamma^2}{2} \left\| u - \frac{1}{\gamma^2} g^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right\|_2^2 \\ &\leq \frac{\gamma^2}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{2} \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Integrando, y usando el hecho que  $V(x) \geq 0$ , tenemos

$$-V(x_0) \leq V(x(\tau)) - V(x_0) \leq \frac{\gamma^2}{2} \int_0^\tau \|u(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|y(t)\|_2^2 dt.$$

Por lo tanto

$$\int_0^\tau \|y(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^\tau \|u(t)\|_2^2 dt + 2V(x_0).$$

Sacando raíz cuadrada y usando la desigualdad  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ , que vale si  $a$  y  $b$  son números no negativos, llegamos a

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{2V(x_0)},$$

que muestra que (6.13) tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor o igual que  $\gamma$ .  $\square$

Habíamos visto en el Teorema 6.1 que estabilidad exponencial del origen de (6.13) implica, bajo ciertas hipótesis adicionales, que el sistema es  $\mathcal{L}_p$  estable con ganancia finita para cada  $p \in [1, \infty]$ . En el caso de  $p = 2$  disponemos de otra herramienta para probar que el sistema tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  finita: encontrar una función  $V(x)$  que satisfaga la desigualdad de Hamilton-Jacobi (6.14). Si esto pasa, no es necesario que el origen sea exponencialmente estable, como vemos en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 6.6.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2) + u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

con  $g(x_1) = ax_1^3$ ,  $a > 0$  y  $h(x_2) = kx_2$ ,  $k > 0$ . En el Ejemplo 3.8 habíamos probado, usando la función

$$W(x) = \int_0^{x_1} g(y) dy + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{4}ax_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

que el origen de este sistema (con  $u = 0$ ) es GAE. Usando  $V(x) = \alpha W(x)$ , con  $\alpha > 0$ , como candidata para resolver la desigualdad de Hamilton-Jacobi (6.14), nos queda

$$\mathcal{H}(V, f, g, h, \gamma) = \left( -\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) x_2^2$$

Para probar (6.14) tenemos que elegir  $\alpha > 0$  y  $\gamma > 0$  tales que

$$-\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \leq 0 \iff \gamma^2 \geq \frac{\alpha^2}{2\alpha k - 1} \quad (6.16)$$

Como nos interesa el mínimo  $\gamma$ , elegimos  $\alpha$  para minimizar el lado derecho de la desigualdad de arriba. Esto da  $\alpha = 1/k$  y  $\gamma^2 \geq 1/k^2$ . Por lo tanto, eligiendo  $\gamma = 1/k$ , concluimos que el sistema tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor o igual que  $1/k$ . Notemos que el origen del sistema no forzado ( $u = 0$ ) no es exponencialmente estable, lo que puede verse inmediatamente de la linealización alrededor del origen.  $\circ$

El ejemplo anterior puede generalizarse de la siguiente manera.

**Ejemplo 6.7.** Consideremos el sistema (6.13) con  $m = q$  (igual número de entradas y salidas), y supongamos que existe  $W(x) \geq 0$ , continuamente diferenciable, que satisface

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} f(x) &\leq -kh^T(x)h(x), & k > 0 \\ \frac{\partial W}{\partial x} g(x) &= h^T(x)\end{aligned}\tag{6.17}$$

para todo  $x \in R^n$ . Usando  $V(x) = \alpha W(x)$ ,  $\alpha > 0$ , como candidata para resolver la desigualdad de Hamilton-Jacobi (6.14), nos queda

$$\mathcal{H}(V, f, g, h, \gamma) = \left( -\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) h^T(x)h(x)$$

Igual que en el ejemplo anterior, para probar (6.14) tenemos que elegir  $\alpha > 0$  y  $\gamma > 0$  tales que (6.16) se satisfaga. Repitiendo el argumento que usamos antes, concluimos que el sistema tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor o igual que  $1/k$ .  $\circ$

**Ejemplo 6.8.** Consideremos el sistema (6.13) con  $m = q$ , y supongamos que existe  $W(x) \geq 0$ , continuamente diferenciable, que satisface

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} f(x) &\leq 0 \\ \frac{\partial W}{\partial x} g(x) &= h^T(x)\end{aligned}\tag{6.18}$$

para todo  $x \in R^n$ . La realimentación de salida

$$u = -ky + v, \quad k > 0$$

da el sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) - kg(x)g^T(x) \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^T + g(x)v \triangleq f_c(x) + g(x)v \\ y &= h(x) = g^T(x) \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^T\end{aligned}$$

Es fácil de ver que  $W(x)$  y  $f_c(x)$  satisfacen (6.17). Por lo tanto, el mapeo de entrada-salida de  $v$  a  $y$  es  $\mathcal{L}_2$  estable con ganancia finita y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  es menor o igual que  $1/k$ . Es decir, la ganancia  $\mathcal{L}_2$  puede hacerse arbitrariamente pequeña solo con elegir la ganancia  $k$  del control suficientemente grande.  $\circ$

# Bibliografía

- Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.
- Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.
- Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.
- Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.
- Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.
- Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.
- Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.
- Sontag, E.D. and Y. Wang (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters* **24**, 351–359.
- van der Schaft, A. J. (2000).  *$L_2$ -gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.



# Índice alfabético

- Banach, *véase* espacio de Banach
- Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii
- Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy
- causalidad, 87
- centro, 13
- Chetaev, *véase* teorema de Chetaev
- ciclo límite, 20
- clausura, 27
- condición de Lipschitz, 29
- conjunto cerrado, 27
- control adaptable, 10
- convergencia de secuencias, 27
- Coulomb, *véase* fricción de Coulomb
  - robusta, 76
- desigualdad de Gronwall-Bellman, 26
- desigualdad de Hölder, 25
- desigualdad de Hamilton-Jacobi, 94
- diodo túnel, 6, 17
- ecuación de Lienard, 9
- ecuación de sensibilidad, 39
- ecuación de Van der Pol, 9, 21
- ensilladura, 11
- equilibrios
  - definición, 4
  - hiperbólicos, 16
  - múltiples, 16
  - perturbación, 14
- espacio de Banach, 27
- espacio lineal normado, 27
- espacios de señales, 85
- estabilidad, 42
- Estabilidad  $\mathcal{L}$ 
  - en variable de estado, 90
- estabilidad  $\mathcal{L}$ , 87
- estabilidad asintótica global, 49
- estabilidad de sistemas perturbados, 75
- estabilidad entrada-estado, 80
- estabilidad estrada-salida, 87
- estabilidad estructural, 16
- estabilidad exponencial, 68
- estabilidad uniforme, 67
- foco, 13
- forma de Jordan, 16
- fricción de Coulomb, 8
- fricción estática, 8
- función de Lyapunov, 44
- función de sensibilidad, 39
- función definida positiva, 45
- funciones de clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ , 67
- ganancia de un sistema, 88
- Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman
- Hölder, *véase* desigualdad de Hölder
- Hamilton-Jacobi, *véase* desigualdad de Hamilton-Jacobi
- inestabilidad, 42, 50
- ISS, *véase* estabilidad entrada-estado
- Jacobiana, 19
- Jordan, *véase* forma de Jordan
- LaSalle, *véase* teorema de LaSalle
- Lienard, *véase* ecuación de Lienard
- linealización
  - análisis de puntos de equilibrio, 17
  - y estabilidad, 59
- Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz
- Lyapunov
  - función, 44
  - método directo, 43
  - método indirecto, 62
  - superficie, 44
  - teorema de estabilidad, 43, 65
  - teoremas conversos, 71
- método del gradiente variable, 47
- método indirecto de Lyapunov, 62
- mapa contractivo, 27
- matriz Jacobiana, 19

- nodo, 11
- norma, 27
  
- operador, 85
- oscilador
  - armónico, 20
  - de relajación, 21
  - de resistencia negativa, 9
  - de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol
  
- péndulo, 5, 17
- perturbación de equilibrios, 14
- principio de comparación, 39
- principio de invariancia, 52
  - sistemas inestacionarios, 72
- punto fijo, 27
- puntos de equilibrio, 4
  
- región de atracción, 49, 56
- retrato de fase, 11
  - construcción numérica, 21
  
- secuencia convergente, 27
- secuencia de Cauchy, 27
- sensibilidad, 39
- separatriz, 17
- sistema masa-resorte, 7
- superficie de Lyapunov, 44
  
- teorema de Barbashin-Krasovskii, 49
- teorema de Chetaev, 50
- teorema de estabilidad de Lyapunov, 43
- teorema de LaSalle, 53
- teoremas conversos, *véase* Lyapunov
  
- Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol