

Capítulo 7

Análisis de Sistemas Realimentados

En este capítulo vamos a trabajar con la estructura en realimentación de la Figura 7.1. El objetivo es buscar herramientas que garanticen la estabilidad de la interconexión en términos de propiedades de estabilidad de cada uno de los elementos que la constituyen. Un caso especial de la configuración en realimentación que vamos a considerar es cuando uno de los elementos es un sistema lineal y el segundo elemento es un elemento no lineal estático (Figura 7.2).

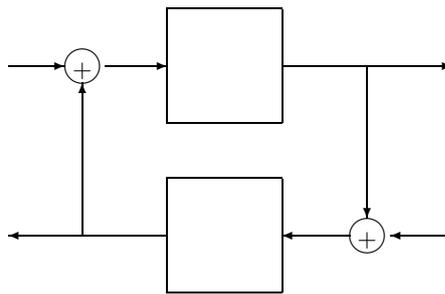


Figura 7.1: Conexión en realimentación

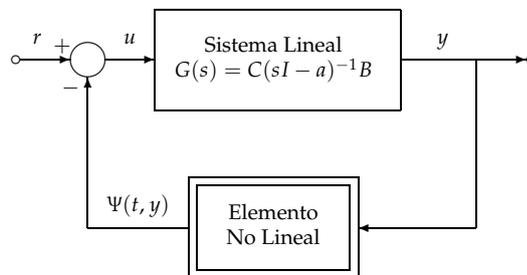


Figura 7.2: Conexión en realimentación de un sistema lineal y una alinealidad estática

7.1. Estabilidad Absoluta

Consideremos la estructura de la Figura 7.2. Asumimos que la entrada externa es $r = 0$ y estudiamos el comportamiento del sistema no forzado, representado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7.1)$$

$$y = Cx \quad (7.2)$$

$$u = -\psi(t, y) \quad (7.3)$$

donde $x \in R^n$, $u, y \in R$, (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi : [0, \infty) \times R \rightarrow R$ es seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en y , y representa un elemento no lineal sin memoria, posiblemente inestacionario. La función de transferencia del sistema lineal está dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (7.4)$$

que se asume estrictamente propia (grado relativo mayor o igual que uno). Las hipótesis de controlabilidad y observabilidad aseguran que (A, B, C) son una realización mínima de $G(s)$. El elemento no lineal $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface una *condición de sector* (o es un elemento no lineal de sector), es decir, existen constantes α, β, a y b (con $\beta > \alpha$ y $a < 0 < b$) tal que

$$\alpha y^2 \leq y \psi(t, y) \leq \beta y^2, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b] \quad (7.5)$$

Si (7.5) vale para todo $y \in (-\infty, \infty)$, decimos que la condición de sector es global. (Ver ejemplos en la Figura 7.3). A veces el \leq en alguno o ambos lados de (7.5) es reemplazado por el $<$ estricto. Cuando (7.5) vale globalmente se suele decir que $\psi(\cdot, \cdot)$ pertenece al sector $[\alpha, \beta]$ (o (α, β) , $[\alpha, \beta)$, (α, β) , respectivamente). Es fácil mostrar que (7.5) implica la desigualdad

$$[\psi(t, y) - \alpha y][\psi(t, y) - \beta y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b] \quad (7.6)$$

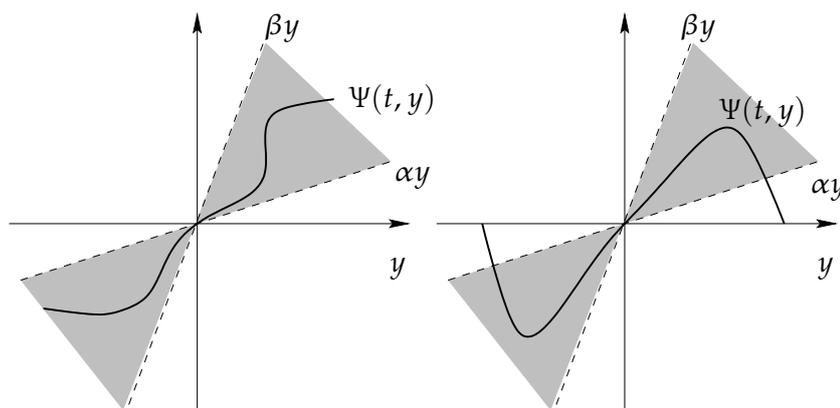


Figura 7.3: Alinealidad de sector global (izquierda) y local (derecha).

Para todos los elementos no lineales que satisfacen la condición de sector (7.6), el origen $x = 0$ es un PE del sistema (7.1)–(7.3). Lo que nos interesa ahora es buscar condiciones que garanticen la estabilidad del origen para toda la clase de elementos no lineales que

satisfacen la condición de sector. Si conseguimos probar que el origen es AE para todo elemento no lineal en el sector, se dice que el sistema es *absolutamente estable*. El problema fue originalmente formulado por Lure, y a veces se lo llama el *problema de Lure*. Tradicionalmente, estabilidad absoluta fue definida para el caso en que el origen es *globalmente* AE. Vamos entonces a usar la frase “estabilidad absoluta” cuando la condición de sector es global y cuando el origen es GAE, en caso contrario hablamos de “estabilidad absoluta con dominio finito”.

Definición 7.1 (Estabilidad Absoluta). Consideremos el sistema (7.1)–(7.3), donde $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector (7.6). El sistema es absolutamente estable si el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable (GUAE) para todo elemento no lineal en el dado sector. Es absolutamente estable con dominio finito si el origen es UAE. ◦

Vamos a investigar estabilidad asintótica del origen usando dos candidatas a función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x, & P &= P^T > 0 \\ V(x) &= x^T P x + \eta \int_0^y \beta \psi(\sigma) d\sigma, & P &= P^T > 0, \eta \geq 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

La segunda candidata se conoce como función de Lyapunov del tipo Lure. Para esta función se asume que ψ es estacionaria y satisface algunas condiciones que aseguran que la integral está bien definida y es no negativa. En ambos casos comenzamos con P sin determinar y establecemos una condición bajo la cual existe P tal que la derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema es definida negativa para todo elemento no lineal en un dado sector. Esta condición tiene la forma de una condición en el dominio frecuencial de una determinada función de transferencia. Esta condición frecuencial usa el concepto de función de transferencia *real positiva* y su relación con la existencia de funciones de Lyapunov que verifican ciertas propiedades. Vamos a ver ahora esos conceptos.

Definición 7.2 (Función de Transferencia Real Positiva). Una función de transferencia racional y propia $Z(s)$ es real positiva (RP) si

- $Z(s)$ es analítica en $\text{Re } s > 0$ (semiplano complejo derecho abierto);
- todo polo imaginario (o sea, en $s = j\omega$) de $Z(s)$ es un polo simple y con residuo no negativo;
- la parte real de $Z(j\omega)$ es no negativa, o sea,

$$\text{Re } Z(j\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in R$$

lo que es equivalente a que el diagrama de Nyquist de $Z(j\omega)$ está contenido en el semiplano complejo derecho cerrado.

Una función de transferencia $Z(s)$ es estrictamente real positiva (ERP) si $Z(s - \epsilon)$ es RP para algún $\epsilon > 0$. ◦

Lema 7.1 (Propiedades de FT ERP). Una función de transferencia $Z(s)$ es ERP sii

- $Z(s)$ es Hurwitz, o sea, todos sus polos tienen parte real negativa;
- $\text{Re } Z(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in R;$

- una de las siguientes dos condiciones se satisface:

1. $Z(\infty) > 0$;
2. $Z(\infty) = 0$ y $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$.

○

Ejemplo 7.1.

- $Z(s) = \frac{1}{s}$ es RP porque no tiene polos en $\operatorname{Re} s > 0$, tiene un polo simple en $s = 0$ con residuo 1, y

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \operatorname{Re} \frac{1}{j\omega} = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

No es ERP porque $1/(s - \epsilon)$ tiene un polo en $\operatorname{Re} s > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$.

- $Z(s) = \frac{1}{s+a}$, $a > 0$ es RP porque no tiene polos en $\operatorname{Re} s \geq 0$, y

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{a}{\omega^2 + a^2} > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Para todo $\epsilon \in (0, a)$, la FT $Z(s - \epsilon) = 1/(s + a - \epsilon)$ es también RP. Por lo tanto $Z(s) = 1/(s + a)$ es ERP. Lo mismo se podría haber probado usando el Lema 7.1 ya que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} Z(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^2 a}{\omega^2 + a^2} = a > 0$$

- $Z(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ no es RP porque

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} < 0, \quad \forall \omega > 1$$

En realidad, cualquier FT de grado relativo mayor que uno no es RP porque el diagrama de Nyquist no va a estar confinado al lado derecho del plano complejo.

○

Las FT ERP tienen una propiedad muy importante conocida como el *Lema Real Positivo*, o el *Lema de Kalman-Yakubovich-Popov*.

Lema 7.2 (Kalman-Yakubovich-Popov). Sea $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ una FT con A Hurwitz, (A, B) controlable y (A, C) observable. Entonces $Z(s)$ es ERP sii existen matrices $P = P^T > 0$, W y L , y una constante $\epsilon > 0$ tales que

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P \tag{7.8}$$

$$PB = C^T - L^T W \tag{7.9}$$

$$W^T W = D + D^T \tag{7.10}$$

○

7.1.1. Criterio del Círculo

Consideremos el sistema (7.1)–(7.3), con A Hurwitz y donde $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector (7.6) con $\alpha = 0$, o sea

$$\psi(t, y)[\psi(t, y) - \beta y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b] \quad (7.11)$$

Tomamos

$$V(x) = x^T P x$$

con P a elegir, y calculamos la derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias de (7.1)–(7.3):

$$\dot{V}(t, x) = x^T (PA + A^T P)x - 2x^T P B \psi(t, Cx)$$

Sumamos $-2\psi(\psi - \beta Cx)$ (que es ≥ 0 por (7.11)) al lado derecho y obtenemos una cota superior de $\dot{V}(t, x)$, es decir

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq x^T (PA + A^T P)x - 2x^T P B \psi(t, Cx) - 2\psi(t, Cx)[\psi(t, Cx) - \beta Cx] \\ &= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T (\beta C^T - PB)\psi(t, Cx) - 2[\psi(t, Cx)]^2 \end{aligned}$$

Vamos a completar cuadrados para probar que el lado derecho es definido negativo. Para eso, supongamos que existen matrices $P = P^T > 0$ y L , y una constante $\epsilon > 0$ tales que

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P \quad (7.12)$$

$$PB = \beta C^T - \sqrt{2} L^T \quad (7.13)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -\epsilon x^T P x - x^T L^T L x + 2\sqrt{2} x^T L^T \psi(t, Cx) - 2[\psi(t, Cx)]^2 \\ &= -\epsilon x^T P x - [Lx - \sqrt{2} \psi(t, Cx)]^2 \\ &\leq -\epsilon x^T P x \end{aligned}$$

Vemos que podemos probar que $\dot{V}(t, x)$ es definida negativa si podemos encontrar P , L y ϵ que satisfagan (7.12)–(7.13). Usando el Lema 7.2 vemos que esto es así sii la FT

$$Z(s) = 1 + \beta C(sI - A)^{-1} B = 1 + \beta G(s)$$

es ERP. Probamos entonces el siguiente lema.

Lema 7.3. Consideremos el sistema (7.1)–(7.3), donde A es Hurwitz, (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector (7.11) globalmente. Entonces el sistema es absolutamente estable si $Z(s) = 1 + \beta G(s)$ es ERP.

Si (7.11) se satisface solo en un intervalo $[a, b]$ finito, entonces la misma condición de $Z(s)$ garantiza que el sistema es absolutamente estable con dominio finito. \circ

La condición de que A sea Hurwitz puede removerse mediante un truco llamado *transformación de lazo* o *corrimiento de polos*. Supongamos que A no es Hurwitz y que el elemento no lineal $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector (7.6) con $\alpha \neq 0$. Definimos un nuevo sistema lineal

$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1 + \alpha G(s)} \quad (7.14)$$

con modelo de estado

$$\dot{x} = (A - B\alpha C)x + Bu$$

$$y = Cx$$

y un nuevo elemento no lineal

$$\psi_T(t, y) = \psi(t, y) - \alpha y$$

Esto es equivalente a aplicar una realimentación negativa de ganancia α alrededor de $G(s)$ y restar (αy) a la salida del elemento no lineal (ver Figura 7.4). Vemos que si ψ pertenece al sector $[\alpha, \beta]$, entonces ψ_T pertenece al sector $[0, \beta - \alpha]$. Por lo tanto, si $G_T(s)$ es Hurwitz estaríamos en condiciones de aplicar el Lema 7.3 y concluir que si $Z_T(s) = 1 + (\beta - \alpha)G_T(s)$ es ERP, el sistema es absolutamente estable.

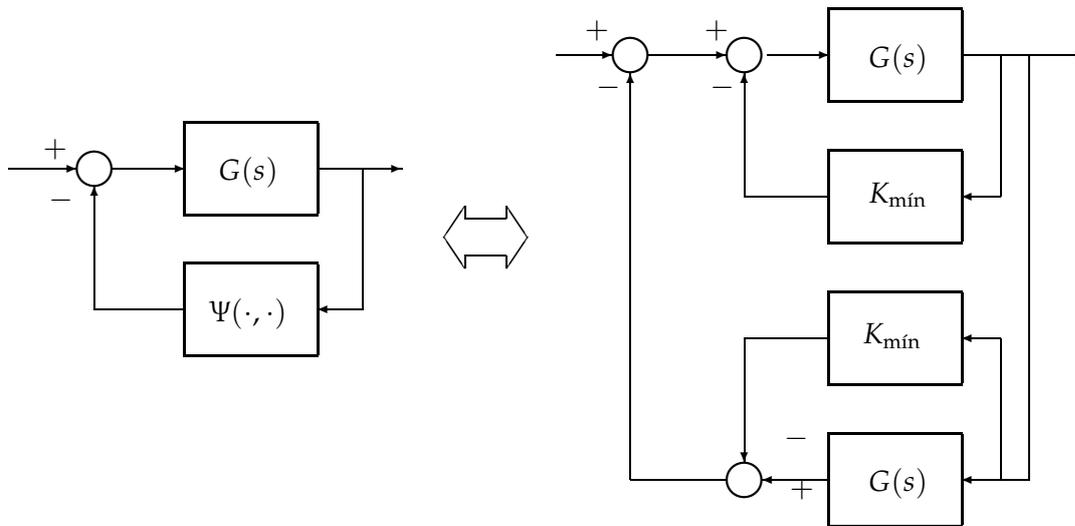


Figura 7.4: Transformación de lazo.

Para aplicar el Lema 7.3, tenemos que verificar que:

- $Z_T(s)$, que puede escribirse como

$$\begin{aligned} Z_T(s) &= 1 + (\beta - \alpha)G_T(s) \\ &= 1 + (\beta - \alpha)\frac{G(s)}{1 + \alpha G(s)} \\ &= \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)} \end{aligned}$$

es ERP y

- $G_T(s)$ en (7.14) es Hurwitz.

Para verificar que $Z_T(s)$ es ERP podemos usar el Lema 7.1 que dice que $Z_T(s)$ es ERP sii $Z_T(s)$ es Hurwitz y

$$\operatorname{Re} \frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)} > 0, \quad \forall \omega \in R \quad (7.15)$$

Vamos a relacionar esta condición con el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$. Para eso necesitamos distinguir entre tres casos diferentes dependientes del signo de α .

Caso $0 < \alpha < \beta$

En este caso, multiplicando por α/β , (7.15) se puede reescribir como

$$\operatorname{Re} \frac{1/\beta + G(j\omega)}{1/\alpha + G(j\omega)} > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

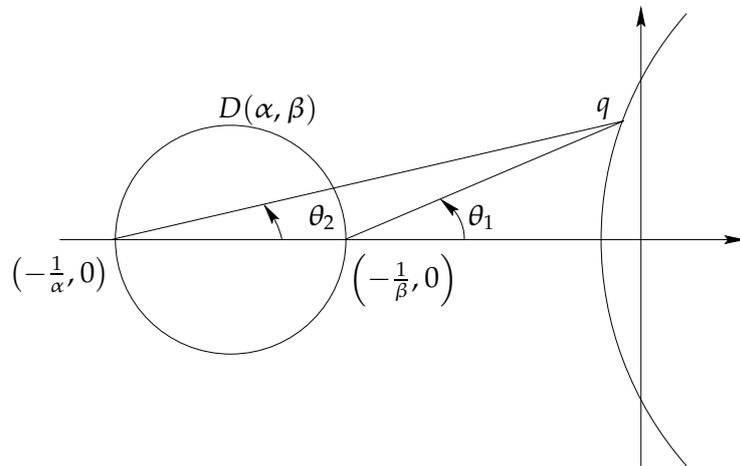


Figura 7.5: Representación gráfica del criterio del círculo

Dado un punto q sobre el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$, los números complejos $1/\beta + G(j\omega)$ y $1/\alpha + G(j\omega)$ pueden representarse con los vectores que conectan los puntos $(-1/\beta)$ y $(-1/\alpha)$ con q , respectivamente (ver Figura 7.5). Notar que, si $G(j\omega) \neq -1/\beta$ y $G(j\omega) \neq -1/\alpha$

$$\operatorname{Re} \frac{1/\beta + G(j\omega)}{1/\alpha + G(j\omega)} = \left| \frac{1/\beta + G(j\omega)}{1/\alpha + G(j\omega)} \right| \cos(\theta_1 - \theta_2) > 0 \quad \iff \quad \theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

Definamos $D(\alpha, \beta)$ como el disco cerrado en el plano complejo que pasa por los puntos $(-1/\beta)$ y $(-1/\alpha)$ y con centro en el eje real. Es fácil de ver que $\theta_1 - \theta_2 < \pi/2$ siempre que el punto q esté fuera del disco $D(\alpha, \beta)$. Como la condición (7.15) tiene que valer para toda ω real, concluimos que todos los puntos sobre el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ deben estar fuera del disco $D(\alpha, \beta)$.

Por otro lado, para garantizar que $G_T(s)$ en (7.14) sea Hurwitz (lo que implica que $Z_T(s)$ es Hurwitz), usamos el criterio de Nyquist, que dice que $G_T(s)$ es Hurwitz si el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ no interseca el punto $(-1/\alpha)$ y lo envuelve, en sentido antihorario, exactamente m veces, donde m es el número de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho abierto.

Por lo tanto, las condiciones para estabilidad absoluta se satisfacen si el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ no entra en el disco $D(\alpha, \beta)$ y lo envuelve m veces en sentido antihorario.

Caso $\alpha = 0, \beta > 0$

En este caso $G_T(s) = G(s)$ y la condición (7.15) toma la forma

$$\operatorname{Re}[1 + \beta G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

o

$$\operatorname{Re} G(j\omega) > -\frac{1}{\beta}, \quad \forall \omega \in R$$

Por lo tanto las condiciones para estabilidad absoluta se satisfacen si $G(s)$ es Hurwitz y el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está a la derecha de la recta vertical $\operatorname{Re} s = -1/\beta$.

Caso $\alpha < 0 < \beta$

En este caso la condición (7.15) se puede reescribir

$$\operatorname{Re} \frac{1/\beta + G(j\omega)}{1/\alpha + G(j\omega)} < 0, \quad \forall \omega \in R$$

donde el signo de la desigualdad es el opuesto porque multiplicamos por $(\alpha/\beta) < 0$. Repitiendo el análisis anterior, concluimos que ahora **el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ debe estar dentro del disco $D(\alpha, \beta)$** . Esto significa que el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ nunca va a poder envolver al punto $(-1/\alpha)$, lo que implica que **necesitamos que $G(s)$ sea estable** para que $G_T(s)$ también lo sea.

Resumimos todas las condiciones en el siguiente teorema.

Teorema 7.4 (Criterio del Círculo). Consideremos el sistema (7.1)–(7.3), donde (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi(\cdot, \cdot) \in [\alpha, \beta]$. Entonces el sistema es absolutamente estable si la correspondiente de las siguientes condiciones se satisface:

1. Si $0 < \alpha < \beta$, el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ no entra en el disco $D(\alpha, \beta)$ y lo envuelve m veces en sentido antihorario, donde m es el número de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho abierto.
2. Si $0 = \alpha < \beta$, $G(s)$ es Hurwitz y el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está a la derecha de la recta vertical $\operatorname{Re} s = -1/\beta$.
3. Si $\alpha < 0 < \beta$, $G(s)$ es Hurwitz y el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está en el interior del disco $D(\alpha, \beta)$.

o

7.1.2. Criterio de Popov

Es una generalización del criterio del círculo que da resultados menos conservadores.

Teorema 7.5 (Criterio de Popov). Consideremos el sistema (7.1)–(7.3), donde A es Hurwitz, (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi(\cdot)$ es un elemento no lineal estacionario perteneciente al sector $[0, \beta]$. Entonces el sistema es absolutamente estable si existe $\eta \geq 0$ que no sea un autovalor de A y tal que

$$Z(s) = 1 + (1 + \eta s)\beta G(s)$$

es ERP.

o

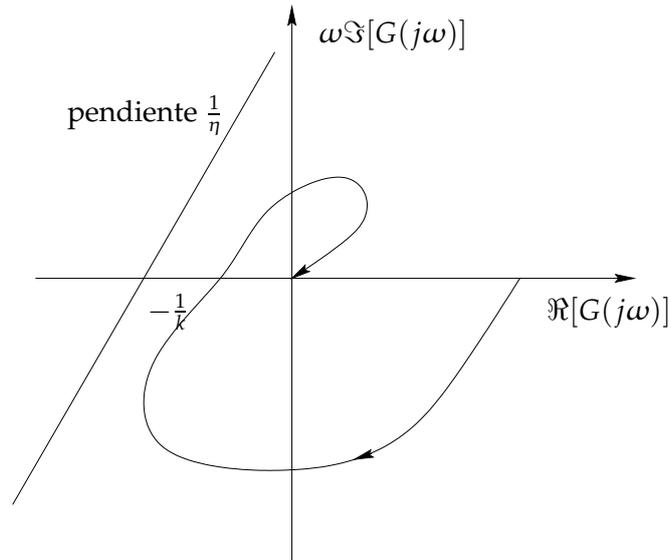


Figura 7.6: Diagrama de Popov.

La prueba es similar a la del Lema 7.3 pero usando (7.7) como candidata a función de Lyapunov. Notar que con $\eta = 0$ el Teorema 7.5 se reduce al Lema 7.3, lo que muestra que el criterio de Popov es menos exigente que el del círculo. Como en el criterio del círculo, la restricción de que A sea Hurwitz puede removerse haciendo transformación de lazos.

Vamos a ver una interpretación gráfica. Para chequear gráficamente que $Z(s)$ es ERP: (i) elegimos $\eta \geq 0$ tal que $Z(\infty) > 0$; (ii) el Lema 7.1 entonces garantiza que $Z(s)$ es ERP sii

$$\operatorname{Re}[1 + (1 + j\omega\eta)\beta G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

lo que equivale a

$$\frac{1}{\beta} + \operatorname{Re}[G(j\omega)] - \eta\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (7.16)$$

Si graficamos $\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)]$ versus $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$, vemos que la condición (7.16) se satisface si la gráfica está a la derecha de la recta que corta el eje de las abscisas en el punto $-1/\beta$ con pendiente $1/\eta$ (ver Figura 7.6). Esta gráfica se conoce como diagrama de Popov.

7.2. Teorema de la Pequeña Ganancia

El formalismo de estabilidad entrada-salida es particularmente útil para estudiar la estabilidad de interconexiones de sistemas dinámicos, ya que la noción de ganancia de un sistema nos permite seguir como la norma de una señal crece o decrece a medida que pasa por un sistema.

Vamos a considerar la interconexión en realimentación de la Figura 7.7). Tenemos dos sistemas: $H_1 : \mathcal{L}_e^m \rightarrow \mathcal{L}_e^q$ y $H_2 : \mathcal{L}_e^q \rightarrow \mathcal{L}_e^m$. Supongamos que ambos sistemas son \mathcal{L} estables con ganancia finita, es decir

$$\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1, \quad \forall e_1 \in \mathcal{L}_e^m, \forall \tau \in [0, \infty) \quad (7.17)$$

$$\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2, \quad \forall e_2 \in \mathcal{L}_e^q, \forall \tau \in [0, \infty) \quad (7.18)$$

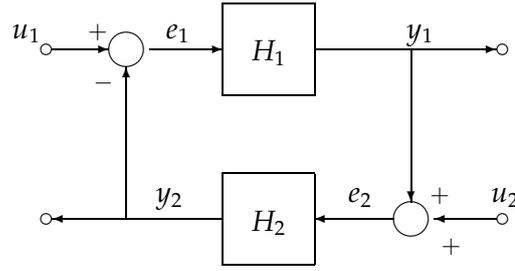


Figura 7.7: Conexión en realimentación.

Supongamos además que la interconexión está *bien definida*, en el sentido de que para cada par de entradas $u_1 \in \mathcal{L}_e^m$ y $u_2 \in \mathcal{L}_e^q$, existen únicas salidas $e_1, y_2 \in \mathcal{L}_e^m$ y $e_2, y_1 \in \mathcal{L}_e^q$. Queremos estudiar si la interconexión en realimentación, cuando es vista como un mapeo desde el par de entrada (u_1, u_2) al par de salida (e_1, e_2) , es \mathcal{L} estable. El siguiente teorema da una condición suficiente para estabilidad \mathcal{L} de la interconexión.

Teorema 7.6 (de la Pequeña Ganancia). Bajo las hipótesis de arriba, si

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1$$

entonces para todo $u_1 \in \mathcal{L}_e^m$ y $u_2 \in \mathcal{L}_e^q$

$$\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1 \gamma_2 + \beta_2) \quad (7.19)$$

$$\|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 \gamma_1 + \beta_1) \quad (7.20)$$

para todo $\tau \in [0, \infty)$. Si $u_1 \in \mathcal{L}^m$ y $u_2 \in \mathcal{L}^q$, entonces $e_1, y_2 \in \mathcal{L}^m$ y $e_2, y_1 \in \mathcal{L}^q$, y las normas de e_1 y e_2 están acotadas por el lado derecho de (7.19) y (7.20) con las funciones sin truncar.

Prueba: Asumiendo la existencia de la solución podemos escribir:

$$e_{1\tau} = u_{1\tau} - (H_2 e_{2\tau})_{\tau}, \quad e_{2\tau} = u_{2\tau} + (H_1 e_{1\tau})_{\tau}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|(H_2 e_{2\tau})_{\tau}\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2 \\ &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 (\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1) + \beta_2 \\ &= \gamma_1 \gamma_2 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + (\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_2 \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1 \gamma_2 + \beta_2) \end{aligned}$$

Como $\gamma_1 \gamma_2 < 1$, despejando $\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}}$ obtenemos (7.19). La cota sobre $\|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}}$ se prueba de la misma manera. Si $u_1 \in \mathcal{L}^m$ y $u_2 \in \mathcal{L}^q$, las normas $\|u_1\|_{\mathcal{L}}$ y $\|u_2\|_{\mathcal{L}}$ son finitas. Por lo tanto, $\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}}$ está acotada para todo τ , uniformemente en τ , ya que $\|u_{i\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \|u_i\|_{\mathcal{L}}$, $i = 1, 2$. Entonces, $\|e_1\|_{\mathcal{L}}$ es finita. Lo mismo se aplica a $\|e_2\|_{\mathcal{L}}$, $\|y_1\|_{\mathcal{L}}$ y $\|y_2\|_{\mathcal{L}}$. \square

El teorema de la pequeña ganancia simplemente dice que la interconexión en realimentación de dos sistemas estables entrada-salida, va también a ser estable entrada-salida si el producto de las ganancias de los sistemas es menor que uno. La interconexión en realimentación es una estructura conveniente para estudiar robustez de sistemas dinámicos. Por ejemplo, H_1 puede tomarse como el sistema nominal y H_2 como una perturbación estable.

7.3. Pasividad

El enfoque de pasividad es un enfoque alternativo para el análisis de estabilidad de sistemas realimentados. En líneas generales, un sistema es pasivo si no genera energía. Vamos a hacer la definición más precisa para sistemas dinámicos representados por ecuaciones de estado y para funciones sin memoria. Primero veamos un ejemplo introductorio.

Ejemplo 7.2 (Circuito RLC). Consideremos el circuito RLC de la Figura 7.8. Tomamos la tensión y corriente en la fuente como entrada u y salida y , respectivamente. El producto uy es el flujo de potencia a la red pasiva. Tomando como variables de estado la corriente en la inductancia, x_1 , y la tensión en el capacitor, x_2 , el modelo de estados es

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= u - R_2x_1 - x_2 \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R_3}x_2 \\ y &= x_1 + \frac{1}{R_1}u \end{aligned}$$

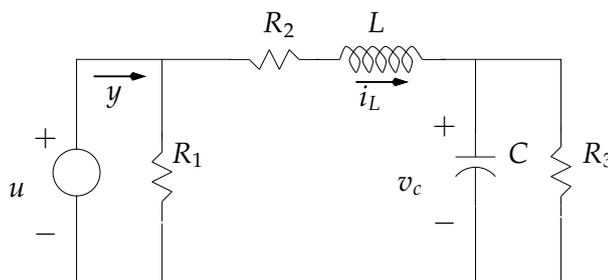


Figura 7.8: Circuito RLC

La energía almacenada en el sistema es $V(x) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2$. Como la red es pasiva, la energía que entra a la red en un período $[0, t]$ debe ser mayor o igual que el aumento de energía almacenada en la red durante ese período, es decir

$$\int_0^t u(s)y(s)ds \geq V(x(t)) - V(x(0)) \quad (7.21)$$

Si la desigualdad (7.21) vale con mayor estricto, la diferencia entre la energía entrante y la almacenada por la red es la energía disipada en los componentes resistivos de la red. Podemos también escribir (7.21) en forma instantánea como

$$u(t)y(t) \geq \dot{V}(x(t)) \quad (7.22)$$

Para la red RLC, podemos llegar a la desigualdad (7.22) directamente planteando la deri-

vada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema, es decir

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 = x_1(u - R_2x_1 - x_2) + x_2(x_1 - \frac{1}{R_3}x_2) \\ &= x_1u - R_2x_1^2 - \frac{1}{R_3}x_2^2 \\ &= (y - \frac{1}{R_1}u)u - R_2x_1^2 - \frac{1}{R_3}x_2^2 \\ &= uy - \frac{1}{R_1}u^2 - R_2x_1^2 - \frac{1}{R_3}x_2^2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$uy = \dot{V}(x) + \frac{1}{R_1}u^2 + R_2x_1^2 + \frac{1}{R_3}x_2^2 \geq \dot{V}(x)$$

Los términos cuadráticos no negativos representan la *tasa de disipación*, de la cual consideramos distintos casos:

Caso 1 $R_1 = R_3 = \infty, R_2 = 0$. En este caso

$$uy = \dot{V}(x)$$

y no hay disipación de energía, el sistema es conservativo.

Caso 2 $R_2 = 0$ y $R_3 = \infty$. En este caso

$$uy = \dot{V}(x) + \frac{1}{R_1}u^2$$

y la tasa de disipación es proporcional al cuadrado de la entrada. No hay disipación de energía sii $u(t)$ es idénticamente cero.

Caso 3 $R_1 = R_3 = \infty$. En este caso $y = x_1$ y tenemos

$$uy = \dot{V}(x) + R_2y^2$$

y la tasa de disipación es proporcional al cuadrado de la salida. No hay disipación de energía sii $y(t)$ es idénticamente cero.

Caso 4 $R_1 = \infty$. En este caso

$$uy = \dot{V}(x) + R_2x_1^2 + \frac{1}{R_3}x_2^2$$

y la tasa de disipación es una función definida positiva del estado x . No hay disipación de energía sii $x(t)$ es idénticamente cero.

Caso 5 $R_1 = \infty, R_2 = 0$. En este caso

$$uy = \dot{V}(x) + \frac{1}{R_3}x_2^2$$

y la tasa de disipación es una función semidefinida positiva del estado. Notar que de la segunda ecuación de estado tenemos

$$x_2(t) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0$$

para cualquier entrada u . Por lo tanto, como en el caso anterior, no hay disipación de energía sii $x(t)$ es idénticamente cero.

Cada uno de estos casos ejemplifican los distintos tipos de sistemas pasivos, que ahora definimos con precisión. \circ

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ es localmente Lipschitz, $h : R^n \times R^m \rightarrow R^m$ es continua, $f(0, 0) = 0$, y $h(0, 0) = 0$. El sistema tiene *el mismo número de entradas que de salidas*.

Definición 7.3 (Sistema Pasivo). El sistema (7.23) es *pasivo* si existe una función continuamente diferenciable y semidefinida positiva $V(x)$ (llamada *función de almacenamiento*) tal que

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + \epsilon u^T u + \delta y^T y + \rho \psi(x), \quad \forall (x, u) \in R^n \times R^m \quad (7.24)$$

donde ϵ , δ y ρ son constantes no negativas, y $\psi(x)$ es una función semidefinida positiva del estado tal que

$$\psi(x(t)) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0 \quad (7.25)$$

para todas las soluciones de (7.23) y cualquier $u(t)$ para el cual la solución existe. El término $\rho\psi(x)$ se denomina *tasa de disipación en el estado*. Más aún, el sistema se dice

- *conservativo* si (7.24) se satisface con la igualdad y con $\epsilon = \delta = \rho = 0$;
- *pasivo estricto de entrada* si $\epsilon > 0$;
- *pasivo estricto de salida* si $\delta > 0$;
- *pasivo estricto de estado* si $\rho > 0$;

Los nombres se combinan cuando hay más de una constante positiva. \circ

La desigualdad (7.24) se denomina *desigualdad de disipación*.

En el caso de pasividad estricta de salida, vamos a considerar la propiedad adicional de que el sistema sea *observable al estado cero*, que significa que tiene la siguiente propiedad

$$y(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0 \quad (7.26)$$

para todas las soluciones de (7.23) cuando $u = 0$. Es decir, ninguna solución de $\dot{x} = f(x, 0)$, salvo la trivial $x(t) \equiv 0$, puede permanecer idénticamente en el conjunto $S = \{x \in R^n : h(x, 0) = 0\}$. Notar que solo se requiere que (7.26) se satisfaga para $u = 0$, mientras que la condición (7.25) sobre la tasa de disipación en el estado debe satisfacerse para todo u .

La condición (7.26) puede interpretarse como una condición de observabilidad. Por ejemplo, para un sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad y = Cx$$

observabilidad es equivalente a la condición

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \equiv 0 \iff x(0) = 0 \iff x(t) \equiv 0$$

El siguiente teorema vincula pasividad con las nociones de estabilidad que conocemos.

Teorema 7.7 (Pasividad y Estabilidad). Consideremos el sistema (7.23).

1. Si el sistema es pasivo con una función de almacenamiento $V(x)$ definida positiva, entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es estable.
2. Si el sistema es pasivo estricto de salida, entonces es \mathcal{L}_2 estable con ganancia finita.
3. Si el sistema es pasivo estricto de salida con una función de almacenamiento $V(x)$ definida positiva, y observable al estado cero, entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es AE.
4. Si el sistema es pasivo estricto de estado con una función de almacenamiento $V(x)$ definida positiva, entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es AE.

Si en alguno de los últimos dos casos $V(x)$ es radialmente no acotada, el origen es GAE.

Prueba: El requisito de que $V(x)$ sea definida positiva hace que la podamos usar como función de Lyapunov. Probamos cada caso por separado.

1. Obvio de $\dot{V} \leq u^T y = 0$ cuando $u = 0$.
2. Planteamos, de (7.24),

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq u^T y - \delta y^T y = -\frac{1}{2\delta}(u - \delta y)^T(u - \delta y) + \frac{1}{2\delta}u^T u - \frac{\delta}{2}y^T y \\ &\leq \frac{1}{2\delta}u^T u - \frac{\delta}{2}y^T y\end{aligned}$$

Integrando entre cero y τ tenemos

$$\int_0^\tau y^T(t)y(t)dt \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^T(t)u(t)dt - \frac{2}{\delta}[V(x(\tau)) - V(x(0))]$$

Es decir

$$\|y_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{1}{\delta}\|u_\tau\|_{\mathcal{L}_2} + \sqrt{\frac{2}{\delta}V(x(0))}$$

3. Planteamos, de (7.24),

$$\dot{V} \leq -\delta h^T(x, 0)h(x, 0) \leq 0$$

Por la observabilidad al estado cero sabemos que la única solución de $\dot{x} = f(x, 0)$ que puede permanecer idénticamente en el conjunto $S = \{x \in R^n : h(x, 0) = 0\}$ es la trivial $x(t) \equiv 0$. Usando el principio de invariancia de Lasalle concluimos que el origen es AE.

4. Se prueba igual que el punto anterior.

□

Veamos dos ejemplos de sistemas pasivos.

Ejemplo 7.3. Un sistema lineal estacionario con realización mínima y función de transferencia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ estrictamente real positiva es *pasivo estricto de estado*. Esto se puede probar usando el Lema 7.2 (Kalman-Yakubovich-Popov). Tomando $V(x) = 1/2x^T Px$, y usando (7.8)–(7.9), tenemos

$$\begin{aligned} u^T y - \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) &= u^T(Cx + Du) - x^T P(Ax + Bu) \\ &= u^T Cx + \frac{1}{2}u^T(D + D^T)u - \frac{1}{2}x^T(PA + A^T P)x - x^T P Bu \\ &= u^T(B^T P + W^T L)x + \frac{1}{2}u^T W^T W u + \frac{1}{2}x^T L^T L x + \frac{1}{2}\epsilon x^T P x - x^T P Bu \\ &= \frac{1}{2}(Lx + Wu)^T(Lx + Wu) + \frac{1}{2}\epsilon x^T P x \\ &\geq \frac{1}{2}\epsilon x^T P x \end{aligned}$$

Por lo tanto (7.24) se satisface con $\rho\psi(x) = \frac{1}{2}\epsilon x^T P x$. \circ

Ejemplo 7.4. Consideremos el sistema (6.13) con $m = q$, $f(0) = 0$ y $h(0) = 0$. Supongamos que (6.18) se satisface. Entonces

$$u^T y - \frac{\partial W}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = u^T h(x) - \frac{\partial W}{\partial x}f(x) - h^T(x)u = -\frac{\partial W}{\partial x}f(x) \geq 0$$

lo que muestra que el sistema es *pasivo*. Si en cambio el sistema satisface (6.17) tenemos

$$u^T y - \frac{\partial W}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \geq -ky^T y$$

y el sistema es *pasivo estricto de salida*. \circ

Veamos ahora un ejemplo para introducir la definición de pasividad para una función estática.

Ejemplo 7.5. Consideremos una fuente de tensión conectada a una resistencia $R > 0$. Tenemos

$$y = \frac{1}{R}u$$

Podemos considerar esta función estática como un sistema con entrada u y salida y . Entonces

$$uy = \frac{1}{R}u^2 = Ry^2 = \frac{1}{2R}u^2 + \frac{R}{2}y^2$$

o sea que el sistema puede definirse como pasivo estricto de entrada, de salida, o de entrada y salida. \circ

Consideremos la función estática inestacionaria

$$y = h(t, x) \tag{7.27}$$

donde $h : R \times R^m \rightarrow R^m$ es seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en u .

Definición 7.4 (Función Estática Pasiva). La función (7.27) es pasiva si

$$y^T y \geq \epsilon u^T u + \delta y^T y, \quad \forall u \in R^m \quad (7.28)$$

donde ϵ y δ son constantes no negativas. Más aún, el sistema se dice

- *pasivo estricto de entrada* si $\epsilon > 0$;
- *pasivo estricto de salida* si $\delta > 0$.

7.3.1. Estabilidad de la Interconexión en Realimentación de Sistemas Pasivos

Vamos a considerar la interconexión en realimentación de la Figura 7.7), donde H_1 y H_2 son pasivos. Vamos a ver tres teoremas. El primero prueba estabilidad \mathcal{L}_2 con ganancia finita. El segundo teorema trata estabilidad asintótica del origen del sistema no forzado cuando H_1 y H_2 son sistemas dinámicos. El tercer teorema también trata estabilidad asintótica pero cuando H_2 es una función estática.

Teorema 7.8. Supongamos que la interconexión de la Figura 7.7 está bien definida, en el sentido de que para cada par de entradas $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_{2e}^m$, existen únicas salidas $e_1, e_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}_{2e}^m$. Supongamos además que H_1 y H_2 son pasivos, es decir, satisfacen

$$e_i^T y_i \geq \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i, e_i) + \epsilon_i e_i^T e_i + \delta_i y_i^T y_i, \quad i = 1, 2 \quad (7.29)$$

(Si H_i es una función estática, la correspondiente V_i es cero.) Entonces el mapeo a lazo cerrado desde el par de entrada (u_1, u_2) al par de salida (y_1, y_2) , es \mathcal{L}_2 estable con ganancia finita si

$$\epsilon_1 + \delta_2 > 0 \quad \text{y} \quad \epsilon_2 + \delta_1 > 0 \quad (7.30)$$

o

La condición (7.30) se satisface si

- tanto H_1 como H_2 son pasivos estrictos de entrada;
- tanto H_1 como H_2 son pasivos estrictos de salida;
- uno de los dos operadores es pasivo mientras que el otro es pasivo estricto de entrada y salida.

Teorema 7.9. Consideremos el sistema en realimentación de la Figura 7.7, donde H_1 y H_2 son sistemas dinámicos con ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i, e_i) \\ y_i &= h_i(x_i, e_i) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Supongamos que el sistema en realimentación tiene un modelo de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

donde $x = [x_1 \ x_2]^T$, $u = [u_1 \ u_2]^T$, $y = [y_1 \ y_2]^T$, f es localmente Lipschitz, h es continua, $f(0,0) = 0$ y $h(0,0) = 0$. Sean H_1 y H_2 sistemas pasivos con desigualdades de disipación

$$e_i^T y_i \geq \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i, e_i) + \epsilon_i e_i^T e_i + \delta_i y_i^T y_i + \rho_i \psi_i(x_i), \quad i = 1, 2$$

Entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es estable y toda solución que comienza suficientemente cerca del origen es acotada. Si $V_1(x_1)$ y $V_2(x_2)$ son radialmente no acotadas, entonces todas las soluciones de $\dot{x} = f(x, 0)$ son acotadas. El origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es AE en cualquiera de los siguientes casos:

Caso 1 $\rho_1 > 0$ y $\rho_2 > 0$;

Caso 2 $\rho_1 > 0$ y $\epsilon_1 + \delta_2 > 0$ y H_2 es observable al estado cero;

Caso 3 $\rho_2 > 0$ y $\epsilon_2 + \delta_1 > 0$ y H_1 es observable al estado cero;

Caso 4 $\epsilon_1 + \delta_2 > 0$, $\epsilon_2 + \delta_1 > 0$ y tanto H_1 como H_2 son observables al estado cero.

Si en cualquiera de los cuatro casos $V_1(x_1)$ y $V_2(x_2)$ son radialmente no acotadas, entonces el origen es GAE.

Prueba: Tomemos $u_1 = u_2 = 0$. En este caso $e_1 = -y_2$ y $e_2 = y_1$. Usando $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ como función de Lyapunov del sistema en realimentación, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1, -y_2) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} f_2(x_2, y_1) \\ &\leq -\rho_1 \psi_1(x_1) - \rho_2 \psi_2(x_2) - (\epsilon_2 + \delta_1) y_1^T y_1 - (\epsilon_1 + \delta_2) y_2^T y_2 \end{aligned}$$

Si ambos sistemas son solo pasivos, entonces $\dot{V} \leq 0$ y el sistema es estable, y existe $c > 0$ tal que todas las soluciones que comienzan en $\{V(x) \leq c\}$ están acotadas. Si $V(x)$ es radialmente no acotada, c puede ser arbitrariamente grande. Para probar estabilidad asintótica usamos LaSalle, o sea, probamos que $\dot{V}(x(t)) \equiv 0$ implica $x(t) \equiv 0$, en cada caso.

Caso 1 Sigue de la propiedad (7.25) de $\psi_i(x_i)$.

Caso 2

$$\rho_1 > 0 \implies \psi_1(x_1(t)) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0$$

y

$$\epsilon_1 + \delta_2 > 0 \implies y_2(t) \equiv 0 \implies e_1(t) \equiv 0$$

Ahora

$$x_1(t) \equiv 0, e_1(t) \equiv 0 \implies y_1(t) \equiv 0 \implies e_2(t) \equiv 0$$

y por observabilidad de H_2 concluimos que $x_2(t) \equiv 0$.

Caso 3 Análogo al Caso 2.

Caso 4

$$\epsilon_1 + \delta_2 > 0 \implies y_2(t) \equiv 0$$

$$\epsilon_2 + \delta_1 > 0 \implies y_1(t) \equiv 0$$

Por observabilidad de H_1 y H_2 concluimos que $x(t) \equiv 0$. □

Teorema 7.10. Consideremos el sistema en realimentación de la Figura 7.7, donde H_1 es un sistema dinámico descrito por

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, e_1)$$

$$y_1 = h_1(x_1, e_1)$$

y H_2 es una función estática de forma

$$y_2 = h_2(t, e_2)$$

Supongamos que el sistema en realimentación tiene un modelo de estado

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

$$y = h(t, x, u)$$

donde $x = x_1$, $u = [u_1 \ u_2]^T$, $y = [y_1 \ y_2]^T$, f y h son seccionalmente continuas en t y localmente Lipschitz en (x, u) , $f(t, 0, 0) = 0$ y $h(t, 0, 0) = 0$. Sean H_1 y H_2 sistemas pasivos, es decir, satisfacen

$$e_1^T y_1 \geq \frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(x_1, e_1) + \epsilon_1 e_1^T e_1 + \delta_1 y_1^T y_1 + \rho_1 \psi_1(x_1)$$

$$e_2^T y_2 \geq \epsilon_2 e_2^T e_2 + \delta_2 y_2^T y_2$$

Entonces el origen de $\dot{x} = f(t, x, 0)$ es estable y toda solución que comienza suficientemente cerca del origen es acotada $\forall t \geq 0$. Si $V_1(x_1)$ es radialmente no acotada, entonces todas las soluciones de $\dot{x} = f(t, x, 0)$ son acotadas. El origen de $\dot{x} = f(t, x, 0)$ es UAE si H_1 es pasivo estricto de estado con $\psi_1(x_1)$ definida positiva. Si H_2 es estacionaria, entonces el origen de $\dot{x} = f(t, x, 0)$ es AE en cualquiera de los siguientes casos:

Caso 1 $\rho_1 > 0$;

Caso 2 $\epsilon_2 + \delta_1 > 0$ y H_1 es observable al estado cero.

Si $V_1(x_1)$ es radialmente no acotada, entonces el origen es GAE. ○

Ejemplo 7.6 (Estabilidad Absoluta). Sea H_1 lineal, estacionario, con realización mínima y función de transferencia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ estrictamente real positiva. Vimos en el Ejemplo 7.3 que H_1 es pasivo estricto de estado con función de almacenamiento $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ y tasa de disipación de estado $\rho\psi(x) = \frac{1}{2}\epsilon x^T Px$, con $P > 0$ y $\epsilon > 0$.

Sea H_2 la función estática $y_2 = h(t, e_2)$, donde h es seccionalmente continua en t , localmente Lipschitz en e_2 , y tal que

$$u^T h(t, u) \geq 0, \quad \forall u \in R^m, \forall t \geq 0$$

Esta desigualdad muestra que H_2 es pasivo.

Es fácil de ver que el sistema en realimentación tiene un modelo de estado bien definido. Concluimos por el Teorema 7.10 que el origen del sistema a lazo cerrado es GUAE. Este es un resultado de estabilidad absoluta. ○

Bibliografía

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- G.H. Golub and C.F. van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 3rd edition, 1996.
- J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer, 1983.
- A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, and S. Monaco. Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26:331–345, 1981.
- Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- Alberto Isidori. *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag, 1999.
- H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 2nd edition, 1996.
- M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotović. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, 1995.
- Shankar Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 1999.
- R. Sepulchre, M. Janković, and P. V. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.
- E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:435–443, 1989.
- E.D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, 24:351–359, 1995.
- A. J. van der Schaft. *L₂-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag, 2000.
- W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Third Edition*. Springer-Verlag, 1985.

Índice alfabético

- amortiguamiento no lineal, 157
- backstepping, 159
 - de sistemas en realimentación estricta, 163
 - de un integrador, 159
- Banach, *véase* espacio de Banach
- Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii
- Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy
- causalidad, 87
- centro, 13
- Chetaev, *véase* teorema de Chetaev
- ciclo límite, 20
- clausura, 27
- condición de apareamiento, 157
- condición de Lipschitz, 29
- conjunto cerrado, 27
- control adaptable, 10, 157
- convergencia de secuencias, 27
- Coulomb, *véase* fricción de Coulomb
- desigualdad de Gronwall-Bellman, 26
- desigualdad de Hölder, 25
- desigualdad de Hamilton-Jacobi, 94
- difeomorfismo, 138
- dinámica de los cerros, 148
- diodo túnel, 6, 17
- ecuación de Lienard, 9
- ecuación de sensibilidad, 39
- ecuación de Van der Pol, 9, 21
- ensilladura, 11
- equilibrios
 - definición, 4
 - hiperbólicos, 16
 - múltiples, 16
 - perturbación, 14
- espacio de Banach, 27
- espacio lineal normado, 27
- espacios de señales, 85
- estabilidad, 42
- Estabilidad \mathcal{L}
 - en variable de estado, 90
 - estabilidad \mathcal{L} , 87
 - estabilidad asintótica global, 49
 - estabilidad de sistemas perturbados, 75
 - estabilidad entrada-estado, 80
 - estabilidad entrada-salida, 87
 - estabilidad estructural, 16
 - estabilidad exponencial, 68
 - robusta, 76
 - estabilidad uniforme, 67
- foco, 13
- forma de Jordan, 16
- forma normal, 148
- fricción de Coulomb, 8
- fricción estática, 8
- función de Lyapunov, 44
- función de sensibilidad, 39
- función definida positiva, 45
- funciones de clase \mathcal{K} y \mathcal{KL} , 67
- ganancia de un sistema, 88
- grado relativo, 143
- Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman
- Hölder, *véase* desigualdad de Hölder
- Hamilton-Jacobi, *véase* desigualdad de Hamilton-Jacobi
- inestabilidad, 42, 50
- ISS, *véase* estabilidad entrada-estado
- Jacobiana, 19
- Jordan, *véase* forma de Jordan
- LaSalle, *véase* teorema de LaSalle
- Lienard, *véase* ecuación de Lienard
- linealización
 - análisis de puntos de equilibrio, 17
 - y estabilidad, 59
- Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz
- Lyapunov
 - función, 44
 - método directo, 43

- método indirecto, 62
- superficie, 44
- teorema de estabilidad, 43, 65
- teoremas conversos, 71

- método del gradiente variable, 47
- método indirecto de Lyapunov, 62
- mínima fase, 149
- mapa contractivo, 27
- matriz Jacobiana, 19

- nodo, 11
- norma, 27

- operador, 85
- oscilador
 - armónico, 20
 - de relajación, 21
 - de resistencia negativa, 9
 - de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol

- péndulo, 5, 17
- perturbación de equilibrios, 14
- principio de comparación, 39
- principio de invariancia, 52
 - sistemas inestacionarios, 72
- punto fijo, 27
- puntos de equilibrio, 4

- rediseño Lyapunov, 157
- región de atracción, 49, 56
- retrato de fase, 11
 - construcción numérica, 21

- secuencia convergente, 27
- secuencia de Cauchy, 27
- sensibilidad, 39
- separatriz, 17
- sistema en realimentación estricta, 163
- sistema linealizable entrada-estado, 138
- sistema masa-resorte, 7
- superficie de Lyapunov, 44

- teorema de Barbashin-Krasovskii, 49
- teorema de Chetaev, 50
- teorema de estabilidad de Lyapunov, 43
- teorema de LaSalle, 53
- teoremas conversos, *véase* Lyapunov

- Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol