

**Parte II**

**Control**



## Capítulo 8

# Control en Realimentación

Los últimos capítulos tratan sobre el diseño de control en realimentación. Introducimos varias herramientas de diseño, incluyendo linealización, tabulación de ganancia, linealización exacta por realimentación, control integral, etc. La mayoría de las herramientas de análisis que hemos visto en los capítulos anteriores entran en juego en estos últimos capítulos. En particular, en este capítulo comenzamos con una sección general sobre problemas de control a modo de introducción a los capítulos que siguen. Luego presentamos dos secciones sobre diseño vía linealización, y diseño por tabulación de ganancia (*gain scheduling*).

### 8.1. Problemas de Control

Muchas tareas de control requieren el uso de control por realimentación. En general, un objetivo básico de un sistema de control es hacer que alguna salida, digamos  $y$ , se comporte de forma deseada mediante la manipulación de alguna entrada, digamos  $u$ . El objetivo más simple puede ser tratar de mantener  $y$  pequeña (o cercana a algún punto de equilibrio) — un problema de *regulación* o *estabilización* — o tratar de mantener la diferencia  $y - r$  pequeña, donde  $r$  es una señal de entrada de referencia perteneciente a cierta clase de señales deseadas — un problema de *servomecanismo* o *seguimiento*. Por ejemplo:

- En un avión comercial la aceleración vertical debe mantenerse por debajo de cierto valor para garantizar comodidad a los pasajeros.
- En un amplificador de audio la potencia de señales de ruido en la salida debe ser suficientemente pequeña para obtener buena fidelidad.
- En la fabricación de papel el contenido de humedad debe mantenerse entre ciertos valores especificados.

Cada problema de control, a su vez, puede tener distintas versiones, dependiendo de los elementos disponibles para resolverlo. Por ejemplo, uno puede resolver un problema de regulación por *realimentación de estados*, si es que todos los estados necesarios son medibles, o bien, por *realimentación de salida*.

En un problema de control típico existen objetivos de diseño adicionales a los básicos de regulación o seguimiento. Por ejemplo, pueden existir requerimientos especiales sobre la respuesta transitoria de  $y$ , o restricciones en los valores de la entrada de control  $u$ . Estos objetivos adicionales pueden no ser completamente compatibles entre sí, por lo que en muchos casos forzosamente se cae en soluciones de compromiso. El deseo de optimizar estas soluciones de compromiso da lugar a la formulación de varios problemas de control óptimo.

Un objetivo de control adicional particularmente importante es el de mantener los objetivos básicos de diseño ante la presencia de incertidumbres en el modelo matemático del sistema. El diseño de control con tolerancia de incertidumbres de modelado lleva a la formulación de problemas de control *robusto*, o bien problemas de control *adaptable*. En control robusto, la incertidumbre de modelado se caracteriza como una perturbación de un modelo nominal. En control adaptable, por otro lado, la incertidumbre se caracteriza en términos de un conjunto de parámetros desconocidos, y se diseña la realimentación de forma que estos parámetros puedan estimarse mientras el sistema se encuentra en operación. Existen también formulaciones mixtas, que combinan control robusto y adaptable.

En este curso nos limitamos a describir los problemas básicos de estabilización, seguimiento, y rechazo de perturbaciones. Comenzamos con el problema de estabilización, en sus versiones de realimentación de estados, y realimentación de salida.

### 8.1.1. Estabilización

**Realimentación de estados.** El problema de estabilización para el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

es el problema de diseñar una ley de control

$$u = \gamma(t, x)$$

tal que el origen  $x = 0$  sea un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)).$$

Una vez que sabemos como resolver este problema, podemos estabilizar el sistema con respecto a un punto  $p$  arbitrario mediante traslación del origen con el cambio de variables  $\xi = x - p$ . Más aún,  $p$  no tiene que ser un punto de equilibrio del sistema a lazo abierto (basta que exista  $q$  tal que  $f(t, p, q) = 0, \forall t$ ).

La ley de control en realimentación  $u = \gamma(t, x)$  suele llamarse «realimentación estática», puesto que es una función estática de  $x$ . Alternativamente, puede usarse una ley de control dinámica

$$\begin{aligned} u &= \gamma(t, x, z) \\ \dot{z} &= g(t, x, z), \end{aligned}$$

donde  $z$  es la solución de un sistema dinámico cuya entrada es  $x$ . Un ejemplo típico de realimentación dinámica es el control con *acción integral*, que veremos más adelante.

**Realimentación de salida.** El problema de estabilización por realimentación de salida para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u) \end{aligned}$$

consiste en diseñar el control estático

$$u = \gamma(t, y)$$

o bien (mas común en este caso ya que por lo general se necesita construir un *observador* para estimar el estado  $x$ ) el control dinámico

$$\begin{aligned}u &= \gamma(t, y, z) \\ \dot{z} &= g(t, y, z)\end{aligned}$$

tal que  $x = 0$  ( $z = 0$ ) sea un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado  $\dot{x} = f(t, x, \gamma(\cdot))$ .

**Sistemas lineales estacionarios.** Naturalmente, el problema de estabilización por realimentación se simplifica si el sistema es lineal y estacionario,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

El control  $u = Kx$  preserva la linealidad del sistema, y el origen del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

es exponencialmente estable sii  $A + BK$  es Hurwitz. La teoría de sistemas lineales establece que si el par  $(A, B)$  es *controlable*, se pueden asignar arbitrariamente todos los autovalores de  $A + BK$  mediante elección apropiada de  $F$ . Si  $(A, B)$  es *estabilizable*, sólo pueden asignarse los autovalores controlables, pero los no controlables de  $A$  (a lazo abierto) deben tener parte real negativa.

Cuando los estados no están disponibles para realimentación, se puede construir un observador, y se realimentan los estados estimados  $\hat{x}$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} + Du - y) \\ u &= K\hat{x}\end{aligned}$$

En este caso, para asegurar que  $\hat{x}(t)$  converge a  $x(t)$ , la matriz  $A + HC$  debe ser Hurwitz. La teoría de sistemas lineales garantiza que si el par  $(A, C)$  es *observable*, se pueden asignar arbitrariamente todos los autovalores de  $A + HC$  mediante elección apropiada de  $H$ .

Una propiedad importante de los sistemas lineales es el *principio de separación*, que establece que el problema de estabilización por realimentación de salida puede resolverse agregando las soluciones de

1. El problema de estabilización mediante realimentación estática de estados,  $u = Kx$ ,
2. El problema de observación de  $x$  a partir de la medición de  $u$  e  $y$ .

Si las matrices  $A + BK$  y  $A + HC$  son Hurwitz, el sistema a lazo cerrado realimentado vía observador es estable, y con los autovalores a lazo cerrado deseados. Esto puede comprobarse planteando la dinámica del sistema total planta/error de estimación,  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

**Sistemas no lineales.** Para sistemas no lineales generales el problema es más difícil y menos entendido. La forma más práctica de encarar el problema de estabilización para sistemas no lineales es recurrir a los resultados disponibles en el caso lineal, es decir, vía linealización. Vamos a estudiar dos métodos de este tipo:

1. *Diseño vía linealización (Sección 8.2):* linealizamos el sistema alrededor del origen, y diseñamos un control lineal estabilizante para la linealización. La estabilidad alcanzada en el sistema no lineal será local, aunque podemos estimar la región de atracción. La validez de esta idea está garantizada por el Método Indirecto de Lyapunov (Teorema 3.11).
2. *Control por ganancia tabulada (Sección 8.3):* linealizamos el sistema alrededor de una familia de puntos de equilibrio deseados, diseñamos un control lineal estabilizante para cada linealización, y usamos algún mecanismo para conmutar de uno a otro.

En el Capítulo 9 veremos una idea de linealización distinta; trabajaremos con clases especiales de sistemas no lineales que pueden transformarse en sistemas lineales mediante realimentación y (posiblemente) cambio de coordenadas. Luego de esta transformación se puede diseñar un controlador lineal estabilizante para el sistema lineal obtenido. A diferencia de la anterior, este tipo de linealización no involucra ninguna aproximación; es exacta. Esta exactitud, sin embargo, asume conocimiento perfecto de las ecuaciones de estado del sistema y usa este conocimiento para cancelar en forma exacta las alinealidades del sistema. Como en la práctica es imposible el conocimiento exacto del modelo del sistema, este método siempre resulta en un sistema a lazo cerrado que es una perturbación del sistema a lazo cerrado nominal. La validez del método, entonces, utiliza los resultados de teoría de Lyapunov para sistemas perturbados vistos en el Capítulo 5.

Cuando un sistema lineal se estabiliza por realimentación, el origen del sistema a lazo cerrado es globalmente asintóticamente estable. Para sistemas no lineales hay distintas posibilidades de estabilización, que ilustramos sobre un ejemplo.

**Ejemplo 8.1.** Supongamos que deseamos estabilizar el origen del sistema escalar

$$\dot{x} = x^2 + u$$

usando realimentación.

- *Estabilización Local:* PE AE sin estima de la RA.

Linealizando sobre el PE  $x = 0$  obtenemos el sistema  $\dot{x} = u$ , para el cual calculamos un control lineal local  $u = -kx$ ,  $k > 0$ , obteniendo

$$\dot{x} = -kx + x^2$$

El PE  $x = 0$  del sistema a lazo cerrado de arriba es AE, por lo tanto  $u = -kx$  consigue estabilización local.

- *Estabilización Regional:* PE AE con una RA garantizada.

Es fácil de ver que la RA de  $u = -kx$  es  $\{x \in \mathbb{R} : x < k\}$ , por lo tanto obtenemos estabilización regional en  $\{x \in \mathbb{R} : x < k\}$ .

- *Estabilización Semiglobal*: PE AE con RA compacta arbitrariamente grande.

Se puede diseñar el control tal que cualquier conjunto compacto (tan grande como se quiera) esté contenido en la RA. En el ejemplo, aumentando  $k$  agrandamos la RA; dado cualquier conjunto compacto  $B_r = \{|x| \leq r\}$ , lo podemos incluir en la RA tomando  $k > r$ .

- *Estabilización Global*: PE GAE.

Para el ejemplo,  $u = -kx$  no consigue estabilización global. Esto es fácil de ver ya que, dado  $r$ , elegimos  $k > r$ , pero una vez que  $k$  está fija, las condiciones iniciales en la región  $\{x > k\}$  dan soluciones que divergen.

Sin embargo, el control no lineal  $u = -x^2 - kx$  consigue estabilización global, ya que el sistema a lazo cerrado  $\dot{x} = -kx$  es GAE.

○

### 8.1.2. Seguimiento en Presencia de Perturbaciones

Pasemos ahora a describir un problema de control más general; concretamente, el problema de seguimiento en presencia de perturbaciones. En este caso el sistema está modelado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u, w) \\ y &= h(t, x, u, w) \\ y_m &= h_m(t, x, u, w)\end{aligned}$$

donde  $x$  es el estado,  $u$  es la entrada de control,  $w$  es la señal de perturbación,  $y$  es la salida a controlar, e  $y_m$  es la salida medida.

El objetivo de control básico es diseñar la entrada de control de forma que la salida controlada  $y$  siga una señal de referencia  $y_R$ , por ejemplo, asintóticamente:

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

A veces esto es imposible para cierto tipo de señales de perturbación  $w$ , entonces se puede pedir, alternativamente,

$$\|e(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq T$$

o, si  $w \in \mathcal{L}_2$ , minimizar la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del operador a lazo cerrado entre  $w$  y  $e$ .

Una clase importante de problemas de seguimiento se da cuando  $y_R$  es una señal constante. En este caso el problema se convierte en uno de *regulación*, y se resuelve estabilizando el lazo cerrado alrededor de un PE en donde  $y = y_R$ .

Las leyes de control por realimentación para el problema de seguimiento se clasifican de la misma forma vista para el problema de estabilización. Hablamos de realimentación de estados si  $x$  puede medirse; o sea,  $y_m = x$ ; de otro modo hablamos de realimentación de salida. En forma análoga, la realimentación puede ser estática o dinámica, y puede alcanzar seguimiento local, regional, semiglobal o global. La diferencia en este caso es que la localidad o globalidad se refiere no sólo al tamaño de las condiciones iniciales, sino también al tamaño de las señales externas. Por ejemplo, en un problema típico, seguimiento local significa que se alcanza seguimiento para estados iniciales y señales externas suficientemente pequeñas, mientras que seguimiento global significa que se alcanza seguimiento para cualquier estado inicial y cualquier  $(y, w)$  en una determinada clase de señales.

## 8.2. Diseño Vía Linealización

Ilustramos el diseño vía linealización para los problemas de estabilización y regulación. En cada caso, comenzamos con el control por realimentación de estados y luego presentamos el control por realimentación de salidas.

### 8.2.1. Estabilización

#### Realimentación de estados

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, \quad (8.1)$$

donde  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(x, u)$  es continuamente diferenciable en un dominio que contiene el origen  $(x, u) = (0, 0)$ . Linealizando alrededor de  $(x, u) = (0, 0)$  obtenemos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.2)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(0,0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(0,0)}. \quad (8.3)$$

De la teoría de sistemas lineales, recordamos ahora algunas propiedades que vamos a usar en adelante. Para más detalles y demostraciones ver por ejemplo Chen (1999, Capítulos 6 y 8) o Bay (1999, Capítulos 8 y 10).

**Definición 8.1 (Controlabilidad).** La ecuación de estados (8.2), o el par  $(A, B)$ , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una entrada  $u$  que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo finito. En caso contrario, la ecuación (8.2), o el par  $(A, B)$ , se dice *no controlable*.  $\circ$

**Proposición 8.1 (Test de Controlabilidad).** El par  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , es controlable si y sólo si la *matriz de controlabilidad*,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np},$$

es de rango  $n$  (rango fila pleno).  $\circ$

**Proposición 8.2 (Invariancia de la controlabilidad respecto a realimentación).** El par  $(A - BK, B)$ , para cualquier matriz  $K^{p \times n}$ , es controlable si y sólo si el par  $(A, B)$  es controlable.  $\circ$

**Proposición 8.3 (Controlabilidad y asignabilidad de autovalores).** Todos los autovalores de  $(A - BK)$  pueden asignarse arbitrariamente (siempre y cuando los autovalores complejos conjugados se asignen en pares) eligiendo la matriz constante real  $K$  si y sólo si  $(A, B)$  es controlable.  $\circ$

Asumiendo  $(A, B)$  controlable, calculamos  $K$  tal que  $A + BK$  sea Hurwitz, y aplicamos  $u = Kx$  al sistema no lineal, obteniendo el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, Kx).$$

Obviamente  $x = 0$  es un PE del sistema y la linealización es

$$\dot{x} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, Kx) K \right]_{x=0} = (A + BK)x.$$

Como  $A + BK$  es Hurwitz, el Teorema 3.11 garantiza que  $x = 0$  es un PE exponencialmente estable del sistema no lineal. Como subproducto del enfoque de linealización, disponemos además de una función de Lyapunov para estimar la RA:

$$V(x) = x^T P x,$$

donde  $P = P^T > 0$  se calcula de la ecuación de Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -I.$$

**Ejemplo 8.2 (Control del péndulo por linealización y realimentación de estados).** Consideremos la ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} = -a \operatorname{sen} \theta - b \dot{\theta} + c T$$

donde  $a = g/l > 0$ ,  $b = k/m \geq 0$ ,  $c = 1/(ml^2) > 0$ ,  $\theta$  es el ángulo entre la cuerda y el eje vertical, y  $T$  es el par aplicado al péndulo. Usando el par como entrada de control, queremos estabilizar al péndulo en un ángulo  $\theta = \delta$ . Tomando como variables de estado  $x_1 = \theta - \delta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  se obtiene el modelo de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \operatorname{sen}(x_1 + \delta) - b x_2 + c T \end{aligned} \quad (8.4)$$

Para que (8.4) tenga un PE en el origen, el par debe tener una componente estática  $T_f$  que satisfaga

$$a \operatorname{sen} \delta + c T_f = 0$$

es decir

$$T_f = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} \quad (8.5)$$

Definimos la variable de control  $u = T - T_f$  y reescribimos (8.4) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a [\operatorname{sen}(x_1 + \delta) - \operatorname{sen} \delta] - b x_2 + c u \end{aligned}$$

que está en la forma (8.1) con  $f(0, 0) = 0$ . Linealizando alrededor del origen obtenemos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

El par  $(A, B)$  es controlable. Tomando  $K = [k_1 \ k_2]$ , obtenemos

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 c - a \cos \delta & k_2 c - b \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + (k_1c - a \cos \delta)\lambda + (k_2c - b)$ . No es difícil comprobar que  $A + BK$  es Hurwitz si

$$k_1 < \frac{a \cos \delta}{c}, \quad k_2 < \frac{b}{c}.$$

Usando (8.5), el par de control que consigue, localmente, estabilizar el ángulo en un valor  $\delta$  es

$$T = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + Kx = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta}.$$

◦

### Realimentación de salida

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

donde  $f(0,0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ ,  $f$  y  $h$  son continuamente diferenciables en un dominio que contiene al origen  $(x, u) = (0,0)$ . Linealizando alrededor de  $(x, u) = (0,0)$ , obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8.7}$$

donde  $A$  y  $B$  están definidas en (8.3), y

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

De la teoría de sistemas lineales, recordemos ahora los conceptos y resultados relativos a observabilidad.

**Definición 8.2 (Observabilidad).** La ecuación de estado (8.7) es observable si para cualquier estado inicial  $x(0)$  (desconocido), existe un tiempo finito  $t_1$  tal que el conocimiento de la entrada  $u$  y la salida  $y$  sobre el intervalo  $[0, t_1]$  es suficiente para determinar en forma única el estado inicial  $x(0)$ . En caso contrario el sistema no observable. ◦

**Proposición 8.4 (Dualidad entre controlabilidad y observabilidad).** El par  $(A, C)$  es observable si y sólo si el par  $(A^T, C^T)$  es controlable. ◦

Si el sistema (8.7) es observable, entonces es posible estimar asintóticamente el vector de estados  $x(t)$  a partir del conocimiento de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  del sistema. La estima  $\hat{x}(t)$  puede calcularse construyendo el *observador*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y).$$

Si la matriz  $A + HC$  es Hurwitz, la estima  $\hat{x}(t)$  se aproximará asintóticamente a  $x(t)$  a medida que  $t$  crece, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$ . Si  $(A, C)$  es observable, es posible asignar arbitrariamente los autovalores de  $A + HC$ .

**Proposición 8.5 (Asignación de autovalores en observadores).** Dado el par  $(A, C)$ , todos los autovalores de  $(A + HC)$  pueden asignarse arbitrariamente seleccionando una matriz real  $H$  si y sólo si  $(A, C)$  es observable.  $\circ$

Volviendo a nuestro sistema (8.7), asumimos  $(A, B)$  controlable,  $(A, C)$  observable, y diseñamos el *control dinámico*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + Gy \\ u &= Lz + My \end{aligned} \quad (8.8)$$

tal que la matriz de lazo cerrado del sistema aumentado (8.7)–(8.8),

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A + BMC & BL \\ GC & F \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

sea Hurwitz. Un ejemplo es el control basado en observador (la variable  $z$  corresponde entonces a la estima del estado  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y) \\ u &= K\hat{x} \end{aligned}$$

donde  $K$  y  $H$  se calculan de forma tal que  $A + BK$  y  $A + HC$  sean Hurwitz, lo que resulta en

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -HC & A + BK + HC \end{bmatrix}.$$

Aplicando el control (8.8) al sistema no lineal obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, Lz + Mh(x)) \\ \dot{z} &= Fz + Gh(x). \end{aligned}$$

Es claro que  $(x, z) = (0, 0)$  es un PE del sistema no lineal a lazo cerrado. Linealizando nos queda la matriz (8.9), por lo que el origen resulta un PE exponencialmente estable. Además, resolviendo una ecuación de Lyapunov para la matriz (8.9), disponemos de una función de Lyapunov, para estimar la RA.

**Ejemplo 8.3 (Control del péndulo por linealización y realimentación de salida).** Volvemos a considerar el péndulo del Ejemplo 8.2. Supongamos que el objetivo de control es el mismo, pero ahora medimos el ángulo  $\theta$  pero no medimos la velocidad angular  $\dot{\theta}$ . Tomamos como variable de salida  $y = x_1 = \theta - \delta$ , y construimos un control dinámico de salida usando el observador

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(\hat{x}_1 - y)$$

Tomando  $H = [h_1 \ h_2]$ , puede verificarse que  $A + HC$  es Hurwitz si

$$h_1 < b, \quad h_2 < a \cos \delta - bh_1$$

El par de control es ahora

$$T = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + K\hat{x}.$$

$\circ$

### 8.2.2. Regulación Vía Control Integral

En el Ejemplo 8.2 consideramos el problema de regular el ángulo  $\theta$  del péndulo a un valor constante  $\delta$ , para lo cual reducimos el problema a uno de estabilización mediante corrimiento del punto de equilibrio deseado al origen. Aunque este enfoque es adecuado cuando se conocen los parámetros del sistema con exactitud, puede no ser aceptable si existen perturbaciones de los valores nominales de los parámetros del modelo. En esta sección presentamos una mejora al esquema de realimentación de estados, el agregado de *acción integral*, que permitirá regulación robusta frente a perturbaciones paramétricas.

La ley de control de par a la que arribamos en el Ejemplo 8.2,

$$T = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + Kx,$$

está formada por

1. una componente estática de régimen estacionario  $T_f = (a/c) \operatorname{sen} \delta$  que da el valor de equilibrio de  $\theta$ , digamos  $\theta_f$ , en el valor deseado de ángulo  $\delta$ , y
2. una componente de realimentación  $Kx$  que hace que  $A + BK$  sea Hurwitz.

Mientras el cálculo de ambas componentes depende de los parámetros del sistema, la parte de realimentación puede diseñarse para que sea robusta dentro de un rango de valores de los parámetros. Por otro lado, el cálculo de  $T_f$  puede ser sensible a variaciones en los parámetros del modelo respecto de sus valores nominales, lo cual cambiará el valor estacionario de  $\theta$  del valor deseado  $\delta$ . El esquema que presentamos a continuación permitirá que el valor de  $\theta$  regule al valor deseado también en forma robusta.

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$ ,  $f$  y  $h$  son funciones continuamente diferenciables en un dominio incluido en  $R^n \times R^p$ ,  $y \in R^p$  es la salida a regular. Sea  $y_R \in R^p$  una señal de referencia constante. Queremos diseñar un control en realimentación tal que

$$y(t) \rightarrow y_R \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

Asumimos que medimos la salida  $y$ . Vamos a estabilizar el sistema a lazo cerrado en un PE tal que  $y = y_R$ . Es claro que, para que esto sea posible, deben existir valores  $x_f$  y  $u_f$  tales que

$$\begin{aligned}0 &= f(x_f, u_f) \\ 0 &= h(x_f) - y_R\end{aligned} \tag{8.10}$$

Asumimos que (8.10) tiene una solución única en el dominio de interés.

Integramos el error de seguimiento  $e \triangleq y - y_R$ :

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R$$

y aumentamos el sistema con el integrador

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{\sigma} &= h(x) - y_R\end{aligned}$$

El control se va a diseñar como una realimentación de los estados  $x$  y  $\sigma$  y tal que el sistema a lazo cerrado tenga un PE en  $(\bar{x}, \bar{\sigma})$  con  $\bar{x} = x_f$ .

Si linealizamos alrededor de  $(x, \sigma, u) = (x_f, \bar{\sigma}, u_f)$ , obtenemos

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \triangleq \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}v$$

con

$$\xi = \begin{bmatrix} x - x_f \\ \sigma - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad v = u - u_f$$

y donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(x_f,u_f)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x_f,u_f)} \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_f}$$

Si  $(A, B)$  es controlable y el rango de  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  es  $n + p$ , entonces  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es controlable. Supongamos que es así y calculemos  $K$  tal que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  sea Hurwitz. Partimos  $K$  como  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ , donde  $K_2$  es  $p \times p$  y no singular (si fuera singular, puede mostrarse que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  sería singular, lo que contradice el hecho de que es Hurwitz). El control es entonces

$$u = K_1(x - x_f) + K_2(\sigma - \bar{\sigma}) + u_f$$

El control integral introduce un grado de libertad que puede usarse para asignar el valor de  $\bar{\sigma}$ . Si elegimos

$$\bar{\sigma} = K_2^{-1}(u_f - K_1 x_f) \triangleq \sigma_f$$

el control dinámico obtenido queda

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= e = y - y_R \\ u &= K_1 x + K_2 \sigma \end{aligned}$$

con lo que ya no necesitamos incluir un término estático en el control para obtener el valor de régimen permanente deseado. La Figura 8.1 muestra un diagrama de bloques del sistema controlado con este esquema de realimentación de estados con acción integral.

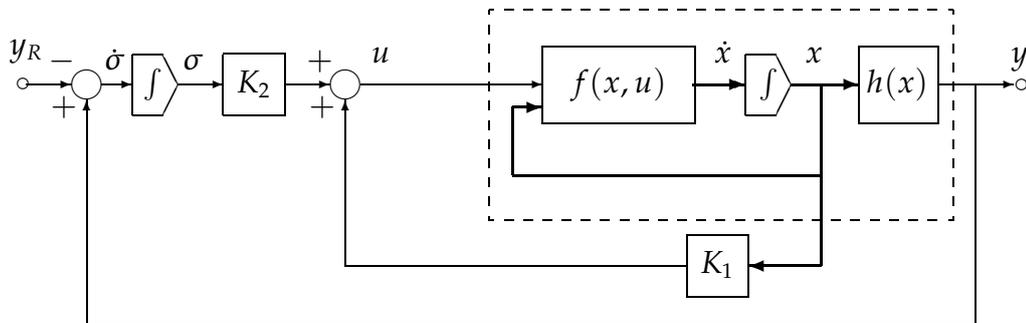


Figura 8.1: Esquema de realimentación de estados con acción integral.

El sistema no lineal a lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, K_1 x + K_2 \sigma) \\ \dot{\sigma} &= h(x) - y_R\end{aligned}$$

que tiene un PE en  $(x_f, \sigma_f)$ . Si linealizamos sobre este PE queda

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} K_1 & \frac{\partial f}{\partial u} K_2 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{(x,\sigma)=(x_f,\sigma_f)} \xi \\ \xi &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}K)\xi,\end{aligned}$$

que es exponencialmente estable. Por lo tanto  $y(t) \rightarrow y_R$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (para condiciones iniciales en la región de atracción).

**Ejemplo 8.4 (Control del péndulo por linealización y realimentación de estados con acción integral).** Volvemos a considerar el péndulo del Ejemplo 8.2, donde el objetivo de control es estabilizar al péndulo en un ángulo  $\theta = \delta$ . Tomando  $x_1 = \theta - \delta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $y = x_1$  y  $u = T$  obtenemos el modelo de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta) - b x_2 + c u \\ y &= x_1 = e\end{aligned}$$

Tomando la referencia  $y_R = 0$  puede verse que el equilibrio deseado es

$$x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_f = \frac{a}{c} \sin \delta$$

Las matrices  $A$  y  $B$  están dadas por (8.6), y  $C = [1 \ 0]$ . Como  $(A, B)$  es controlable y el rango de  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  es  $n + p = 3$ , entonces  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es controlable. Tomando  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ , puede verificarse usando el criterio de Routh-Hurwitz que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  es Hurwitz si

$$b - k_2 c > 0, \quad (b - k_2 c)(a \cos \delta - k_1 c) + k_3 c > 0, \quad -k_3 c > 0$$

Supongamos ahora que no conocemos los valores exactos de los parámetros  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c > 0$ , pero conocemos una cota superior  $\rho_1$  de  $a$  y una cota inferior  $\rho_2$  de  $c$ . Entonces, tomando

$$k_2 < 0, \quad k_3 < 0, \quad k_1 < -\frac{\rho_1}{\rho_2} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2 \rho_1} \right)$$

nos aseguramos que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  es Hurwitz para toda perturbación de los parámetros que satisfaga las cotas  $a \leq \rho_1$  y  $c \geq \rho_2$ . La ley de control del par es

$$\begin{aligned}T &= k_1(\theta - \delta) + k_2 \dot{\theta} + k_3 \sigma \\ \dot{\sigma} &= \theta - \delta\end{aligned}$$

que es un clásico control PID (proporcional-integral-derivativo). Comparando con el par de control obtenido en el Ejemplo 8.2, podemos ver que no es necesario usar el par estacionario para mantener el equilibrio deseado.  $\circ$

La robustez del control integral puede explicarse intuitivamente de la siguiente manera. El control en realimentación de estados crea un PE AE. Cuando el sistema está en este punto de equilibrio, todas las señales deben ser constantes. Para que el integrador  $\dot{\sigma} = e$  tenga una salida constante  $\sigma$ , su entrada  $e$  debe ser cero. Por lo tanto, el control integral fuerza que el error de seguimiento sea cero en equilibrio. Si hay variaciones paramétricas, el PE va a cambiar en general, pero la condición  $e = 0$  en el equilibrio se mantiene. Por supuesto, como el resultado de estabilización es local, esto va a valer para condiciones iniciales  $(x(0), \sigma(0))$  lo suficientemente cercanas al PE  $(x_f, \sigma_f)$ .

Si no disponemos de los estados  $x$  pero medimos  $y$ , el control integral puede implementarse mediante un observador de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u &= K_1 \hat{x} + K_2 \sigma \\ \dot{\sigma} &= e = y - y_R \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y), \end{aligned}$$

representado en el esquema de la Figura 8.2. Notar que usamos el observador para estimar solamente  $x$ , ya que  $\sigma$  está siempre disponible para la realimentación.

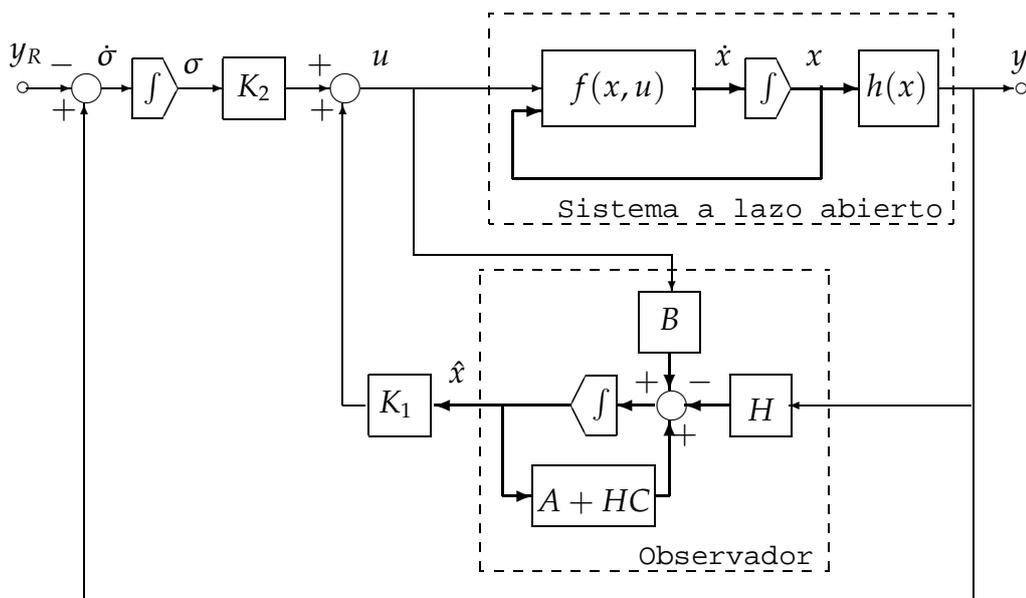


Figura 8.2: Esquema de realimentación de salida con acción integral.

### 8.3. Control por Ganancia Tabulada

La principal limitación del control por linealización es que sólo se puede garantizar que el control cumple su objetivo localmente alrededor de un único PE, o *punto de operación* (PO). Una forma de extender la validez del control por linealización a un conjunto de POs es usar *control por ganancia tabulada* («gain scheduling»). Este enfoque asume que se puede representar el sistema mediante un modelo parametrizado por ciertas variables, llamadas *variables de tabulación* («scheduling variables»), de modo que cuando estas variables asumen un valor constante obtenemos un PO. En estos casos, se linealiza el sistema alrededor

de distintos POs de interés, obteniéndose una familia de modelos lineales para la cual diseñamos una familia de controladores lineales. Luego, se implementa el esquema de control en un único controlador cuyos parámetros son cambiados acorde a los valores que toman las variables de tabulación, que deberán monitorearse continuamente.

El concepto de control por ganancia tabulada se origina en sistemas de control de aeronaves. En estas aplicaciones, las ecuaciones no lineales de movimiento de la aeronave se linealizan alrededor de ciertos POs que capturan los modos principales de operación de la aeronave a lo largo del patrón de vuelo deseado. Se diseñan, entonces, controladores lineales para alcanzar la estabilidad y el desempeño deseados para cada una de las linealizaciones del sistema en cada PO. Luego se interpolan los valores de los parámetros de los controladores como funciones de las variables de tabulación; típicamente, presión, velocidad, altitud, etc. Finalmente, el controlador por ganancia tabulada se implementa como un sistema no lineal.

Vamos a presentar la idea de control por ganancia tabulada a través de un ejemplo simple de control de nivel. Ver Khalil (1996, pp.499–506) para una formulación general y más referencias.

**Ejemplo 8.5 (Control de nivel).** El sistema, representado en la Figura 8.3, puede modelarse por las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^h \beta(z) dz \right) = q - c\sqrt{2h},$$

donde  $h$  es el nivel del líquido en el tanque,  $q$  es el caudal de entrada y  $c$  es una constante positiva. Tomando  $x = h$  como variable de estado y  $u = q$  como entrada de control obtenemos el modelo de estado

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)}(u - c\sqrt{2x}) \triangleq f(x, u)$$

El objetivo de control es que el nivel  $y = x$  siga a una referencia  $y_R$ . Usamos  $y_R$  como variable de tabulación. Cuando  $y_R = \alpha$  constante,  $y$  debe mantenerse igual a  $\alpha$ , para lo cual necesitamos que  $u$  se mantenga en el valor  $\bar{u}(\alpha) = c\sqrt{2\alpha}$ .

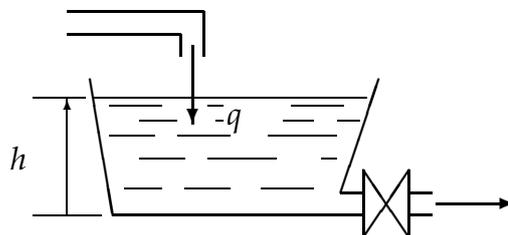


Figura 8.3: Control de nivel de un tanque.

Linealizando alrededor del PO inducido por  $y_R = \alpha$  constante, obtenemos el modelo lineal parametrizado por  $\alpha$

$$\dot{x}_\delta = a(\alpha) x_\delta + b(\alpha) u_\delta,$$

donde

$$x_\delta = x - \alpha, \quad a(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\alpha \\ u=\bar{u}}} = \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{2\alpha\beta(\alpha)},$$

$$u_\delta = u - \bar{u}(\alpha), \quad b(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\alpha \\ u=\bar{u}}} = \frac{1}{\beta(\alpha)}.$$

Consideremos el control PI (proporcional-integral)

$$u_\delta = K_1 e + K_2 \sigma$$

$$\dot{\sigma} = y - y_R = x - \alpha = x_\delta - r_\delta,$$

donde  $r_\delta = y_R - \alpha$ . El sistema lineal a lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\alpha) + b(\alpha)K_1 & b(\alpha)K_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b(\alpha)K_1 \\ -1 \end{bmatrix} r_\delta,$$

cuyo polinomio característico es

$$s^2 - (a + bK_1)s - bK_2.$$

Si, por ejemplo, proponemos tener un polinomio característico de la forma  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ , con determinados valores deseados de  $\omega$  y  $\xi$ , podemos lograrlo eligiendo las ganancias del control

$$K_1(\alpha) = -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)}, \quad K_2(\alpha) = -\frac{\omega_n^2}{b(\alpha)}.$$

El control por ganancia tabulada se obtiene cuando reemplazamos  $\alpha$  por  $y_R$ , con lo que las ganancias variarán directamente con la altura deseada. Antes de seguir, veamos primero una reparametrización del controlador PI que simplificará la tarea de tabulación.

**Parametrización simplificada del control PI.** A veces es posible simplificar la tarea de monitoreo y tabulación mediante una elección adecuada de los parámetros del controlador. Por ejemplo, si reparametrizamos el controlador PI como

$$u_\delta = K \left( e + \frac{1}{T} \sigma \right), \quad K = K_1, T = \frac{K_1}{K_2},$$

y suponiendo que  $|a(\alpha)| \ll 2\xi\omega_n$  (o sea que la parte real deseada para los polos a lazo cerrado es mucho mayor que el polo a lazo abierto), entonces obtenemos

$$K(\alpha) = -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)} \approx -\frac{2\xi\omega_n}{b(\alpha)}, \quad T(\alpha) = \frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{\omega_n^2} \approx \frac{2\xi}{\omega_n}.$$

Tomando  $K(\alpha) = -2\xi\omega_n/b(\alpha) = -2\xi\omega_n\beta(\alpha)$  y  $T = 2\xi/\omega_n$ , vemos que sólo hace falta tabular una única variable:  $K(\alpha)$ . Con este control PI parametrizado en  $\alpha$ , la linealización del sistema a lazo cerrado alrededor de  $(x, \sigma) = (\alpha, \bar{\sigma}(\alpha))$ , e  $y = \alpha$ , resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = A_\ell(\alpha) \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix} + B_\ell r_\delta$$

$$y_\delta = C_\ell \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix},$$

donde

$$A_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\ell = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_n \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_\ell = [1 \ 0]. \quad (8.11)$$

La función de transferencia a lazo cerrado correspondiente, de  $r_\delta$  a  $y_\delta = x_\delta$ , resulta

$$\frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + [2\xi\omega_n - a(\alpha)]s + \omega_n^2}.$$

**Control PI de ganancia tabulada por  $y_R$ .** Dejemos por ahora este análisis lineal y consideremos el controlador PI de ganancia tabulada

$$u = K(y_R) \left( e + \frac{1}{T}\sigma \right) = -2\xi\omega_n\beta(y_R) \left( e + \frac{\omega_n}{2\xi}\sigma \right) \quad (8.12)$$

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R$$

donde la ganancia  $K$  se tabula como una función de la señal de referencia  $y_R$ , *no necesariamente constante*. Cuando se aplica este control a la ecuación de estado no lineal, el sistema no lineal a lazo cerrado resulta

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} \left[ -2\xi\omega_n\beta(y_R) \left( x - y_R + \frac{\omega_n}{2\xi}\sigma \right) - c\sqrt{2x} \right]$$

$$\dot{\sigma} = x - y_R$$

$$y = x.$$

Cuando  $y_R$  es una constante positiva,  $y_R = \alpha$ , el sistema tiene un PE en

$$x = \alpha, \quad \bar{\sigma}(\alpha) \triangleq \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{\omega_n^2\beta(\alpha)},$$

y el valor de equilibrio de  $u$  correspondiente es  $\bar{u} = c\sqrt{2\alpha}$ . Es decir, el control por ganancia tabulada logra el PO deseado. La linealización del sistema alrededor de este PO  $(x, \sigma) = (\alpha, \bar{\sigma}(\alpha))$ , e  $y_R = \alpha$ , resulta en la ecuación lineal de lazo cerrado

$$\dot{\rho}_\delta = A_n(\alpha) \rho_\delta + B_n(\alpha) r_\delta, \quad \text{donde } \rho_\delta = \begin{bmatrix} x - \alpha \\ \sigma - \bar{\sigma}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$y_\delta = C_n \rho_\delta$$

las matrices  $A_n(\alpha)$ ,  $B_n(\alpha)$  y  $C_n(\alpha)$  son

$$A_n(\alpha) = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_n + \gamma(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_n = [1 \ 0], \quad (8.13)$$

y la ganancia  $\gamma(\alpha) = K'(\alpha)\bar{\sigma}(\alpha)/(T\beta(\alpha))$  — donde  $K'(\alpha) = \partial K/\partial y_R|_{y_R=\alpha}$ . La función de transferencia a lazo cerrado de  $r_\delta$  a  $y_\delta = x_\delta$  resulta en este caso

$$\frac{[2\xi\omega_n + \gamma(\alpha)]s + \omega_n^2}{s^2 + [2\xi\omega_n - a(\alpha)]s + \omega_n^2}.$$

Comparando (8.11) con (8.13), vemos que los dos modelos lineales representados por  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  y  $(A_n, B_n, C_n)$  son distintos (en la matriz  $B$ ):

- $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  representa el modelo a lazo cerrado de la familia de modelos lineales parametrizados usados para el diseño del control;
- $(A_n, B_n, C_n)$  representa la linealización alrededor del PO deseado del sistema no lineal a lazo cerrado con el control por ganancia tabulada.

Estos modelos linealizados difieren porque en  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  la ganancia está fija en  $K(\alpha)$ , y no hay que derivar  $K(y_R)$  con respecto a  $y_R$  y evaluarla en  $y_R = \alpha$ . Ambos modelos difieren en la posición del cero de la función transferencia de lazo cerrado, lo que puede dar respuestas transitorias muy diferentes. Idealmente quisiéramos que ambos modelos sean iguales a fin de que se dé el desempeño deseado en las vecindades de cada PO. Vamos a presentar dos trucos para que ambos modelos resulten iguales.

**Truco 1.** No imponer la condición

$$\bar{\sigma}(\alpha) = \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{\omega_n^2\beta(\alpha)}$$

(que evita el uso de términos constantes en el control) y en cambio usar el grado de libertad de asignar  $\bar{\sigma}(\alpha)$  arbitrariamente. El control entonces es

$$u = K(y_R) \left[ e + \frac{1}{T}(\sigma - \bar{\sigma}(y_R)) \right] + \bar{u}(y_R), \quad \bar{u}(y_R) = c\sqrt{2y_R} \quad (8.14)$$

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R$$

y  $\bar{\sigma}(y_R)$  arbitrario. El control (8.12) que usamos antes es un caso particular de (8.14) que surge de imponer la condición

$$\frac{K(y_R)}{T} \bar{\sigma}(y_R) = \bar{u}(y_R).$$

El sistema a lazo cerrado puede escribirse como

$$\dot{x} = f_c(x, y_R).$$

Linealizando alrededor de  $(x, y_R) = (\alpha, \alpha)$  obtenemos

$$\left. \frac{\partial f_c}{\partial x} \right|_{\substack{x=\alpha \\ y_R=\alpha}} = a(\alpha) - 2\xi\omega_n, \quad \left. \frac{\partial f_c}{\partial y_R} \right|_{\substack{x=\alpha \\ y_R=\alpha}} = 2\xi\omega_n + \phi(\alpha),$$

donde

$$\phi(\alpha) = -\frac{K(\alpha)}{T} \frac{\partial \bar{\sigma}(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{1}{\beta(\alpha)} \frac{\partial \bar{u}(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Si elegimos  $\bar{\sigma}(\alpha)$  tal que  $\phi(\alpha) = 0$ , es decir tal que

$$\frac{K(\alpha)}{T} \frac{\partial \bar{\sigma}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{u}(\alpha)}{\partial \alpha}$$

conseguiamos que  $B_n = B_\ell$ , y de esta forma los modelos (8.11) y (8.13) coinciden.

**Truco 2.** Reemplazar el controlador

$$u = K(y_R) \left( e + \frac{1}{T} \sigma \right)$$

$$\dot{\sigma} = e$$

por el controlador

$$u = K(y_R)e + \frac{1}{T}z$$

$$\dot{z} = K(y_R)e$$

que, para  $K$  constante, puede interpretarse como conmutar la ganancia  $K$  con el integrador.  $\circ$

**Resumen.** En base al ejemplo, podemos resumir los pasos a seguir para diseñar un control por ganancia tabulada de la siguiente manera.

1. Linealizar el modelo no lineal alrededor de una familia de POs parametrizada por las variables de tabulación.
2. Diseñar una familia parametrizada de controladores lineales que consigan el desempeño deseado para la familia de modelos lineales en cada PO.
3. Construir un control por ganancia tabulada tal que, en cada PO,
  - el control genere un valor estático que dé error estático nulo,
  - la linealización del sistema no lineal a lazo cerrado en cada PO sea la misma que la de la conexión en realimentación del modelo lineal parametrizado y el correspondiente control lineal.
4. Verificar por simulación el desempeño no local del control por ganancia tabulada para el modelo no lineal.

El paso 2 puede conseguirse resolviendo el problema de diseño para una familia de modelos lineales parametrizados por variables de tabulación, como hicimos en el ejemplo, o bien, resolviendo el problema sólo en un número finito de POs usando la misma estructura de control para todos ellos pero permitiendo que los parámetros del controlador cambien de un PO a otro; luego los parámetros del controlador se interpolan para producir una familia de controladores lineales. Este proceso de interpolación se hace usualmente «ad hoc», y se basa en conocimiento del sistema físico.

Como vimos, la elección del controlador por ganancia tabulada no es única. Poder satisfacer el requerimiento sobre los modelos linealizados enunciado en el paso 3 depende de la estructura de control elegida. Además, la decisión de hasta qué punto debe insistirse en que las linealizaciones del modelo no lineal a lazo cerrado y del modelo lineal parametrizado a lazo cerrado coincidan dependerá de las especificaciones y objetivos de control.

Notar que el análisis de lazo cerrado del controlador por ganancia tabulada sólo considera el comportamiento *local* alrededor de un PO *constante*. ¿Qué puede decirse del comportamiento regional, o global? ¿Qué sucede cuando la variable de tabulación no es constante? En la práctica, la regla es que puede implementarse un controlador de este tipo siempre que las variables de tabulación varíen en forma suficientemente lenta. La estabilidad de sistemas inestacionarios *lentos* puede justificarse usando los resultados en Khalil (1996, Sección 5.7).

# Bibliografía

- Bay, John S. (1999). *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill.
- Chen, Chi-Tsong (1999). *Linear System Theory and Design*. 3rd ed.. Oxford University Press.
- Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.
- Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.
- Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.
- Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.
- Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.
- Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.
- Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.
- Sontag, E.D. and Y. Wang (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters* **24**, 351–359.
- van der Schaft, A. J. (2000).  *$L_2$ -gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.



# Índice alfabético

- Banach, *véase* espacio de Banach  
Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii
- Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy  
causalidad, 87  
centro, 13  
Chetaev, *véase* teorema de Chetaev  
ciclo límite, 20  
clausura, 27  
condición de Lipschitz, 29  
conjunto cerrado, 27  
control adaptable, 10  
convergencia de secuencias, 27  
Coulomb, *véase* fricción de Coulomb
- desigualdad de Gronwall-Bellman, 26  
desigualdad de Hölder, 25  
desigualdad de Hamilton-Jacobi, 94  
diodo túnel, 6, 17
- ecuación de Lienard, 9  
ecuación de sensibilidad, 39  
ecuación de Van der Pol, 9, 21  
ensilladura, 11  
equilibrios  
    definición, 4  
    hiperbólicos, 16  
    múltiples, 16  
    perturbación, 14  
espacio de Banach, 27  
espacio lineal normado, 27  
espacios de señales, 85  
estabilidad, 42  
Estabilidad  $\mathcal{L}$   
    en variable de estado, 90  
estabilidad  $\mathcal{L}$ , 87  
estabilidad asintótica global, 49  
estabilidad de sistemas perturbados, 75  
estabilidad entrada-estado, 80  
estabilidad estrada-salida, 87  
estabilidad estructural, 16  
estabilidad exponencial, 68  
    robusta, 76  
estabilidad uniforme, 67
- foco, 13  
forma de Jordan, 16  
fricción de Coulomb, 8  
fricción estática, 8  
función de Lyapunov, 44  
función de sensibilidad, 39  
función definida positiva, 45  
funciones de clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ , 67
- ganancia de un sistema, 88  
Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman
- Hölder, *véase* desigualdad de Hölder  
Hamilton-Jacobi, *véase* desigualdad de Hamilton-Jacobi
- inestabilidad, 42, 50  
ISS, *véase* estabilidad entrada-estado
- Jacobiana, 19  
Jordan, *véase* forma de Jordan
- LaSalle, *véase* teorema de LaSalle  
Lienard, *véase* ecuación de Lienard  
linealización  
    análisis de puntos de equilibrio, 17  
    y estabilidad, 59  
Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz  
Lyapunov  
    función, 44  
    método directo, 43  
    método indirecto, 62  
    superficie, 44  
    teorema de estabilidad, 43, 65  
    teoremas conversos, 71
- método del gradiente variable, 47  
método indirecto de Lyapunov, 62  
mapa contractivo, 27  
matriz Jacobiana, 19

- nodo, 11
- norma, 27
  
- operador, 85
- oscilador
  - armónico, 20
  - de relajación, 21
  - de resistencia negativa, 9
  - de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol
  
- péndulo, 5, 17
- perturbación de equilibrios, 14
- principio de comparación, 39
- principio de invariancia, 52
  - sistemas inestacionarios, 72
- punto fijo, 27
- puntos de equilibrio, 4
  
- región de atracción, 49, 56
- retrato de fase, 11
  - construcción numérica, 21
  
- secuencia convergente, 27
- secuencia de Cauchy, 27
- sensibilidad, 39
- separatriz, 17
- sistema masa-resorte, 7
- superficie de Lyapunov, 44
  
- teorema de Barbashin-Krasovskii, 49
- teorema de Chetaev, 50
- teorema de estabilidad de Lyapunov, 43
- teorema de LaSalle, 53
- teoremas conversos, *véase* Lyapunov
  
- Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol