Capítulo 9

Linealización Exacta por Realimentación

En este capítulo introducimos elementos de la teoría moderna de control geométrico de sistemas no lineales de control. Esta teoría se inició alrededor de los años '70 con intentos de extender resultados de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales; resultados tales como los que se refieren a controlabilidad y observabilidad del sistema. Más tarde, en 1981 se mostró (Isidori *et al.*, 1981) que no sólo estas extensiones eran posibles, sino también gran parte de la teoría de control geométrico de sistemas lineales al estilo Wonham (1985). El artículo de Isidori *et al.* fue seguido durante los años '80 por un gran número de resultados que generaron un fantástico «juego de herramientas» para sistemas no lineales (Isidori, 1995; Isidori, 1999). Una herramienta central en este «juego de herramientas» es la linealización exacta por realimentación, que presentamos en este capítulo.

Consideramos sistemas no lineales *afines en la entrada de control*, es decir, de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

y planteamos qué condiciones se necesitan para que exista *una realimentación de estados*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

y *un cambio de variables*

$$z = T(x)$$

que transformen al sistema no lineal a una *forma lineal equivalente*. Esta linealización no se refiere a la linealización «Jacobiana» aproximada del sistema, vista en el Capítulo 8, sino que convierte *exactamente* al sistema en lineal.

Comenzaremos con *linealización entrada-estado*, en la que la ecuación de estado completa se linealiza exactamente. Luego introduciremos la *linealización entrada-salida*, en la que sólo la respuesta entrada-salida se linealiza, mientras que una parte del sistema permanece no lineal. Finalmente, presentamos la estabilización de sistemas por medio de linealización exacta por realimentación.

9.1. Linealización Entrada-Estado

Vamos a introducir la idea de linealización exacta por realimentación a través del Ejemplo 8.2 de estabilización del péndulo.

Ejemplo 9.1 (Linealización exacta del péndulo). La inspección del modelo de estado del péndulo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= -a\,[\operatorname{sen}(x_1+\delta)-\operatorname{sen}\delta] - b\,x_2 + c\,u,\end{aligned}$$

muestra que podemos elegir

$$u = \frac{a}{c}\,[\operatorname{sen}(x_1+\delta)-\operatorname{sen}\delta] + \frac{v}{c}$$

para cancelar el término no lineal de la segunda ecuación y obtener el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= -b\,x_2 + v.\end{aligned}$$

De esta manera, el problema de estabilización del sistema no lineal se transforma en el problema de estabilización de un sistema lineal controlable. Podemos elegir, por ejemplo

$$v = k_1\,x_1 + k_2\,x_2$$

tal que los autovalores del sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= k_1\,x_1 + (k_2 - b)\,x_2\end{aligned}$$

tengan parte real negativa. Finalmente, el control completo — no lineal — que convierte al sistema en lineal y estabiliza su equilibrio es entonces

$$u = \frac{a}{c}\,[\operatorname{sen}(x_1+\delta)-\operatorname{sen}\delta] + \frac{1}{c}\,k_1\,x_1 + k_2\,x_2.$$

○

Vamos a ver ahora cuán general es este procedimiento. Es claro que no podemos esperar cancelar alinealidades en cualquier sistema no lineal; debe haber ciertas propiedades estructurales que permiten tal cancelación. Del ejemplo podemos ver que

- para cancelar un término no lineal $\alpha(x)$ por substracción, el control u y el término $\alpha(x)$ siempre deben aparecer juntos en forma de suma $u + \alpha(x)$;
- para cancelar un término no lineal $\gamma(x)$ por división, el control u y el término $\gamma(x)$ siempre deben aparecer juntos en forma de producto $\gamma(x)u$; si $\gamma(x)$ es no singular en el dominio de interés, puede cancelarse con $u = \beta(x)\,v$, con $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$.

Es decir que la posibilidad de convertir una ecuación de estado no lineal en una lineal controlable cancelando alinealidades requiere que la ecuación no lineal tenga la estructura

$$\dot{x} = Ax + B\,\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \tag{9.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el par (A, B) es controlable, y las alinealidades $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p\times p}$, están definidas en un dominio $D_x \in \mathbb{R}^n$ que contiene al origen. Asumimos

que la matriz $\beta(x)$ es no singular $\forall x \in D_x$. Si el sistema tiene la estructura (9.1), entonces podemos usar el control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\, v$$

para obtener la ecuación lineal

$$\dot{x} = A\, x + B\, v.$$

Ahora para estabilizar el sistema podemos simplemente calcular $v = Kx$ tal que $A + BK$ sea Hurwitz. El control estabilizante completo es no lineal y tiene la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx.$$

Y si el sistema no tiene la estructura (9.1); ¿quiere decir que no es posible linealizarlo por realimentación? La respuesta es no. Recordemos que la representación en espacio de estados de un sistema no es única; depende de la elección de las variables de estado. Aún cuando el sistema no tenga inicialmente la estructura (9.1) es posible que un cambio de variables lo lleve a la forma (9.1) en otras coordenadas, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.2 (Sistema exactamente linealizable después de cambio de coordenadas). Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a\ \operatorname{sen} x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Si elegimos $u = x_1^2 + v$ para cancelar el término no lineal, la primera ecuación sigue siendo no lineal. Sin embargo, si hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a\ \operatorname{sen} x_2 = \dot{x}_1 \end{aligned} \tag{9.3}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a\ \cos x_2\, (-x_1^2 + u) \end{aligned}$$

que tiene la forma (9.1), válida en la región $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$. Usando

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a\ \cos x_2}\, v$$

el sistema queda linealizado en las nuevas variables. La ecuación de estados en las nuevas variables se obtiene invirtiendo la transformación (9.3), es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \operatorname{arc\,sen} \frac{z_2}{a} \end{aligned}$$

que está bien definida para $-a < z_2 < a$. La ecuación de estado transformada es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a\ \cos\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{z_2}{a}\right)\ (-z_1^2 + u). \end{aligned}$$

$\circ$

Definición 9.1 (Difeomorfismo). Un difeomorfismo es un cambio de variables T tal que $z = T(x)$ está definido en un dominio D_x, su transformación inversa $x = T^{-1}(z)$ está definida en $D_z = T(D_x)$, y ambos T y T^{-1} son continuamente diferenciables en D_x y D_z, respectivamente. ○

Tenemos ya todos los elementos para hacer la siguiente definición.

Definición 9.2 (Sistema Linealizable Entrada-Estado). Un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{9.4}$$

con f, g definidas en un dominio $D_x \subset \mathbb{R}^n$ y suficientemente suaves (con derivadas continuas hasta el orden que sea necesario), es *linealizable entrada-estado* si existe un difeomorfismo $T : D_x \to \mathbb{R}^n$ tal que $D_z = T(D_x)$ contiene al origen y el cambio de variables $z = T(x)$ transforma a (9.4) en

$$\dot{z} = Az + B\,\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \tag{9.5}$$

con (A, B) controlable y $\beta(x)$ no singular en D_x. ○

Tomando $\alpha_0(z) = \alpha(T^{-1}(z))$, $\beta_0(z) = \beta(T^{-1}(z))$ nos queda el sistema expresado en las nuevas coordenadas:

$$\dot{z} = Az + B\beta_0(z)^{-1}[u - \alpha_0(z)]$$

¿Y cuándo será posible encontrar un difeomorfismo que pueda llevar un sistema dado a la forma (9.5)? Derivando la ecuación $z = T(x)$, es decir

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x}[f(x) + g(x)u]$$

e igualándola a (9.5), concluimos que *el difeomorfismo T debe satisfacer las condiciones*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x} f(x) = AT(x) - B\,\beta(x)^{-1}\alpha(x) \\ &\frac{\partial T}{\partial x} g(x) = B\,\beta(x)^{-1}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

En resumen:

> La existencia de T, α, β, A y B que satisfagan las ecuaciones en derivadas parciales (9.6) es una condición necesaria y suficiente para que $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ sea linealizable entrada-estado.

Así, la determinación de si un sistema no lineal dado es linealizable exactamente por realimentación se reduce a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales (9.6). La resolución de estas ecuaciones puede simplificarse, como explicamos a continuación.

9.1.1. Condiciones simplificadas para la linealización exacta por realimentación

Cuando un sistema es linealizable entrada-estado, la transformación $z = T(x)$ no es única. La forma más simple de ver esto es aplicando la transformación lineal $\zeta = M\,z$, con M no singular; así obtenemos

$$\dot{\zeta} = MAM^{-1}\zeta + MB\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)]$$

que tiene la misma estructura (9.5) pero con matrices A y B diferentes. Vamos a ver ahora que podemos aprovechar la no unicidad de T para simplificar las ecuaciones en derivadas parciales (9.6). Consideremos el caso $p = 1$ (una entrada). Dado cualquier par (A, B) controlable, existe M no singular que lo transforma a la forma canónica controlable, es decir, $MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda^{\mathrm{T}}$, $MB = B_c$, con

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (A_c + B_c\lambda^{\mathrm{T}})\zeta + B_c\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \\ &= A_c\zeta + B_c\beta(x)^{-1}[u - \tilde{\alpha}(x)] \end{aligned}$$

donde $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x) - \beta(x)\lambda^{\mathrm{T}}MT(x)$. Vemos que podemos, sin pérdida de generalidad, considerar que A y B están en la forma canónica controlable A_c y B_c. Ahora escribamos

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que

$$A_cT(x) - B_c\beta(x)^{-1}\alpha(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\alpha(x)/\beta(x) \end{bmatrix}, \qquad \text{y que} \qquad B_c\beta(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\beta(x) \end{bmatrix}.$$

Usando estas expresiones en las ecuaciones en derivadas parciales (9.6) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x}f(x) &= T_2(x), & \frac{\partial T_1}{\partial x}g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x}f(x) &= T_3(x), & \frac{\partial T_2}{\partial x}g(x) &= 0, \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x}f(x) &= T_n(x), & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x}g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x}f(x) &= -\alpha(x)/\beta(x), & \frac{\partial T_n}{\partial x}g(x) &= 1/\beta(x). \end{aligned}$$

Las primeras $n-1$ ecuaciones de la izquierda muestran que las componentes T_2 a T_n de T son funciones de la primera componente T_1. Combinando todas las ecuaciones, la búsqueda se reduce a una función $T_1(x)$ que satisfaga

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) = 0\,, i = 1, 2, \ldots, n-1; \\ &\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) \neq 0 \end{aligned} \tag{9.7}$$

donde

$$T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Las funciones α y β están dadas por

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_n/\partial x) g(x)}, \qquad \alpha(x) = -\frac{(\partial T_n/\partial x) f(x)}{(\partial T_n/\partial x) g(x)}. \tag{9.8}$$

Finalmente, para simplificar los cálculos en las nuevas variables, vamos a imponerle a $T_1(x)$ la condición adicional de que $T_1(x^*) = 0$, donde x^* es un PE del sistema a lazo abierto en las coordenadas originales ($f(x^*) = 0$) con respecto al cual queremos estabilizar al sistema.

Ejemplo 9.3 (Cálculo del difeomorfismo $z = T(x)$). Consideremos nuevamente el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a \operatorname{sen} x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \triangleq f(x) + g\, u$$

que tiene un PE en $x = 0$. Buscamos $T_1(x)$ tal que $T_1(0) = 0$ y

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0, \tag{9.9}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \neq 0, \tag{9.10}$$

donde

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \operatorname{sen} x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}. \tag{9.11}$$

Vemos de (9.9) que $T_1(x)$ no depende de x_2. Usando este dato en (9.11) obtenemos

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \operatorname{sen} x_2. \tag{9.12}$$

Derivando (9.12) con respecto a x_2, y reemplazando el resultado en (9.10) tenemos que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \cos x_2 \neq 0,$$

que se satisface para $\cos x_2 \neq 0$ si tomamos, por ejemplo, $T_1(x) = x_1$. Reemplazando $\partial T_1/\partial x_1 = 1$ en (9.12) obtenemos $T_2(x) = a \operatorname{sen} x_2$, que junto con $T_1(x) = x_1$ da el mismo cambio de variables propuesto en (9.3). Otras elecciones de T_1 son posibles; por ejemplo, $T_1(x_1) = x_1 + x_1^3$ daría otro cambio de variables que lleva al sistema a la forma (9.6). ∘

Ejemplo 9.4 (Generador sincrónico). Un generador sincrónico conectado a un bus infinito puede representarse con el modelo

$$\dot{x} = f(x) + g\,u$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a[(1+x_3)\,\mathrm{sen}(x_1+\delta) - \mathrm{sen}\,\delta] - bx_2 \\ -cx_3 + d[\cos(x_1+\delta) - \cos\delta] \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde a, b, c, d y δ son constantes positivas. El sistema tiene un PE en $x = 0$. Buscamos $T_1(x)$ tal que $T_1(0) = 0$ y

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0 \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \frac{\partial T_2}{\partial x_3} = 0 \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} g = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \neq 0, \tag{9.15}$$

donde

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \tag{9.16}$$

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x). \tag{9.17}$$

Usando (9.13) en (9.16) tenemos

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\{-a[(1+x_3)\,\mathrm{sen}(x_1+\delta) - \mathrm{sen}\,\delta] - bx_2\}. \tag{9.18}$$

Derivando (9.18) con respecto a x_3, y reemplazando el resultado en (9.14) tenemos que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_3} = -a\ \mathrm{sen}(x_1+\delta)\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0.$$

Elegimos T_1 independiente de x_2, y reemplazando $\partial T_1/\partial x_2 = 0$ en (9.18) obtenemos

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2. \tag{9.19}$$

Usamos (9.19) (recordando que T_1 es independiente de x_2 y x_3) en (9.17),

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\{-a[(1+x_3)\,\mathrm{sen}(x_1+\delta) - \mathrm{sen}\,\delta] - bx_2\}. \tag{9.20}$$

Derivando (9.20) con respecto a x_3, y reemplazando el resultado en (9.15) tenemos que

$$\frac{\partial T_3}{\partial x_3} = -a\ \mathrm{sen}(x_1+\delta)\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0,$$

que se satisface en el dominio $0 < x_1 + \delta < \pi$ eligiendo, por ejemplo, $T_1(x) = x_1$. Usando $T_1(x) = x_1$ en (9.19) y (9.20), completamos el cálculo del difeomorfismo $z = T(x)$, dado por

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1(x) = x_1 \\ z_2 &= T_2(x) = x_2 \\ z_3 &= T_3(x) = -a[(1 + x_3)\,\mathrm{sen}(x_1 + \delta) - \mathrm{sen}\,\delta] - bx_2, \end{aligned}$$

cuya transformación inversa

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 \\ x_3 &= -1 - \frac{z_3 + b\,z_2 - a\ \mathrm{sen}\,\delta}{a\ \mathrm{sen}(z_1 + \delta)} \end{aligned}$$

está definida en $0 < z_1 + \delta < \pi$. Las funciones α y β están dadas por (9.8) (con $n = 3$), es decir

$$\begin{aligned} \beta(x) &= -\frac{1}{a\ \mathrm{sen}(x_1 + \delta)} \\ \alpha(x) &= \frac{(\partial T_3/\partial x)\, f(x)}{a\ \mathrm{sen}(x_1 + \delta)} \end{aligned}$$

El modelo de estado en las coordenadas z es entonces

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -a\ \mathrm{sen}(x_1 + \delta)[u - \alpha(x)]. \end{aligned}$$

○

9.2. Linealización Entrada-Salida

La linealización exacta de la ecuación de estado que describimos en la sección anterior no necesariamente linealiza la ecuación de salida. Consideremos otra vez el ejemplo (9.2). Si tomamos como salida $y = x_2$, el cambio de variables y el control

$$z_1 = x_1\,, \quad z_2 = a\ \mathrm{sen}\,x_2\,, \quad u = x_1^2 + \frac{1}{a\ \cos x_2} v$$

resultan en

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \\ y &= \mathrm{arc\,sen}\,\frac{z_2}{a} \end{aligned}$$

que tiene un modelo de estado lineal con salida no lineal. Si, en cambio, tomamos $u = x_1^2 + v$, obtenemos el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a\ \mathrm{sen}\,x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

que tiene una transformación lineal entrada-salida (de u a y) y una dinámica (la de x_1) que es *inobservable* a la salida, ya que y no depende de x_1. Si sólo nos interesara la variable y, el control v podría diseñarse usando técnicas lineales para que y tenga el desempeño deseado. Sin embargo, no hay que descuidar la dinámica inobservable; por ejemplo, si y fuera estabilizada en un valor constante $y_R \neq 0$, la variable x_1 tendría una evolución $x_1(t) = x_1(0) + t\, a$ sen y_R, que crece con t!

Veamos esta idea más formalmente. Sea el sistema mono-entrada mono-salida

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

El caso más simple de sistema linealizable entrada-salida se da cuando es linealizable entrada-estado y la salida de interés es $h(x) = T_1(x)$. En ese caso, el cambio de variables $z = T(x)$ y el control $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ lo transforman en

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c v \\ y &= C_c\, z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

donde (A_c, B_c, C_c) son la forma canónica de una cadena de integradores.

Para una dada salida $y = h(x) = \psi_1(x)$ — no necesariamente igual a $T_1(x)$ — podemos verificar si satisface la condición en derivadas parciales (9.7) directamente por substitución, es decir

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \qquad\qquad \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x) \neq 0,$$

donde $\psi_{i+1}(x) = (\partial \psi_i / \partial x) f(x)\,, i = 1, 2, \dots, n-1$. Esta condición es una restricción en la forma en que las derivadas de y dependen de u. Esto es fácil de ver si calculamos las derivadas temporales de la salida,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} f(x) = \psi_2(x) \\ \ddot{y} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(x) = \psi_3(x) \end{aligned}$$

Si seguimos, vemos que u no aparece en las primeras $n-1$ derivadas de y, pero aparece en la derivada de orden n con un coeficiente no nulo,

$$y^{(n)} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x) u.$$

Es obvio que el control

$$u = \frac{1}{(\partial \psi_n / \partial x) g(x)} \left[-\frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + v \right]$$

da la transformación entrada salida igual a una cadena de n integradores

$$y^{(n)} = v.$$

¿Qué pasaría si u apareciera en una derivada de orden *menor a n* con coeficiente no nulo? Entonces todavía podríamos linealizar la transformación entrada-salida, pero nos quedaría una cadena de menos integradores, y la ecuación de estado tendría una parte no linealizada. Como en los sistemas lineales, el número de veces que hay que derivar la salida hasta que aparezca la entrada con un coeficiente no nulo define el *grado relativo* del sistema.

Definición 9.3 (Grado Relativo). El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{9.21}$$

donde f, g y h, definidas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, son suficientemente suaves, tiene *grado relativo* r, con $1 \leq r \leq n$, en una región $D_0 \subset D$ si

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1; \qquad\qquad \frac{\partial \psi_r}{\partial x} g(x) \neq 0$$

para todo $x \in D_0$, donde $\psi_1(x) = h(x)$ y $\psi_{i+1}(x) = \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x)\,, i = 1, 2, \ldots, r-1$. ◦

> Si el sistema tiene grado relativo (GR) r, entonces es linealizable entrada-salida; si tiene GR n, entonces es linealizable tanto entrada-salida como entrada-estado.

Ejemplo 9.5 (Ecuación de Van der Pol). Consideremos la ecuación de Van der Pol controlada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon\,(1 - x_1^2)\,x_2 + u\,, \quad \epsilon > 0 \end{aligned}$$

con salida $y = x_1$. Calculemos las derivadas de la salida:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon\,(1 - x_1^2)\,x_2 + u \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema tiene GR 2 en $\mathbb{R}^2$.

Si la salida es $y = x_2$, entonces

$$\dot{y} = -x_1 + \epsilon\,(1 - x_1^2)\,x_2 + u$$

y el sistema tiene GR 1 en $\mathbb{R}^2$.

Si la salida es $y = x_1 + x_2^2$, entonces

$$\dot{y} = x_2 + x_2[-x_1 + \epsilon\,(1 - x_1^2)\,x_2 + u]$$

y el sistema tiene GR 1 en $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$. ◦

Ejemplo 9.6 (Sistema sin grado relativo bien definido). Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Las derivadas de la salida son

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 = y \implies y^{(n)} = y = x_1\,, \forall n \geq 1$$

Vemos que en ninguna derivada de la salida aparece la entrada u. En este caso el sistema no tiene un GR bien definido porque la salida $y(t) = x_1(t) = e^t\,x_1(0)$ es independiente de la entrada. ◦

Ejemplo 9.7 (Motor de corriente continua controlado por campo). Un motor de corriente continua controlado por corriente de campo puede describirse por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + u\\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \rho - cx_1x_3\\ \dot{x}_3 &= \theta x_1x_2\end{aligned}$$

donde x_1, x_2 y x_3 son respectivamente la corriente de campo, de armadura, y velocidad angular. Para problemas de control de velocidad elegimos como salida $y = x_3$. Las derivadas de la salida son

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_3 = \theta x_1x_2\\ \ddot{y} &= \theta x_1\dot{x}_2 + \theta\dot{x}_1x_2 = (\cdot) + \theta x_2u,\end{aligned}$$

donde $(\cdot)$ contiene términos que son funciones de x. El sistema tiene GR 2 en la región $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \neq 0\}$. ∘

Ejemplo 9.8 (Sistema lineal). Consideremos el sistema lineal representado por la función transferencia

$$H(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0},$$

donde $m < n$ y $b_m \neq 0$. Un modelo de estado para este sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

Este sistema es un caso particular de (9.21) con $f(x) = Ax$, $g(x) = B$ y $h(x) = Cx$. Veamos el GR del sistema calculando las derivadas de la salida. La primera derivada es

$$\dot{y} = CAx + CBu.$$

Si $m = n - 1$, entonces $CB = b_{n-1} \neq 0$ y el sistema tiene GR 1. En caso contrario, $CB = 0$ y seguimos derivando. Notemos que CA es un vector fila que se obtiene moviendo los elementos de C una posición a la derecha, CA^2 se obtiene moviendo los elementos de C dos posiciones a la derecha, y así sucesivamente. Entonces vemos que

$$\begin{aligned}CA^{i-1}B &= 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, n-m-1\\ CA^{n-m-1}B &= b_m \neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, u aparece por primera vez en la ecuación de $y^{(n-m)}$, que está dada por

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu,$$

y el GR del sistema es $n - m$, o sea la diferencia entre el grado de los polinomios denominador y numerador de $H(s)$. ∘

9.2.1. Linealización Entrada-Salida y Estabilidad Interna. Forma Normal

Vamos a introducir una forma canónica para sistemas no lineales en la que el grado relativo del sistema es explícito. Esta forma canónica se conoce como la *forma normal*, y permite extender a sistemas no lineales el concepto de sistema de mínima fase (en un sistema lineal: sin ceros con parte real no negativa). Primero veamos cómo llevar un sistema lineal a una realización en la que los ceros del sistema queden explícitos.

Caso lineal

Empecemos escribiendo el sistema lineal de grado relativo $r = n - m$ como

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\dfrac{1}{Q(s)}}{1 + \dfrac{1}{Q(s)}\dfrac{R(s)}{N(s)}}, \qquad D(s) = Q(s)N(s) + R(s),$$

donde los grados de D, N y Q son n, $m < n$, y r, respectivamente. Entonces H puede representarse como una interconexión en realimentación negativa con $1/Q(s)$ en la cadena directa y $R(s)/N(s)$ en el camino de realimentación (ver Figura 9.1).

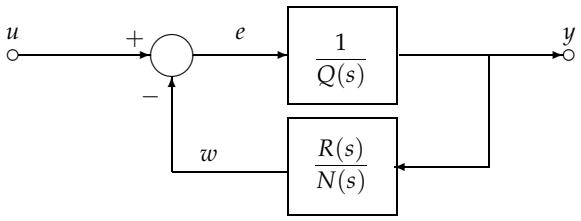

Figura 9.1: Representación en realimentación de $H(s)$

La función transferencia $1/Q(s)$ no tiene ceros, y puede realizarse tomando el vector de estados

$$\xi = \left[y, \quad \dot{y}, \ldots, y^{(r-1)}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Esto nos da el modelo de estados

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A_c + B_c\lambda^{\mathrm{T}})\xi + B_c b_m e \\ y &= C_c\,\xi \end{aligned}$$

donde (A_c, B_c, C_c) son la forma canónica de una cadena de r integradores, $\lambda \in \mathbb{R}^r$ y e es la señal de salida del sumador ($e = u - [R(s)/N(s)]y$). Sea (A_0, B_0, C_0) una realización mínima de la función transferencia $R(s)/N(s)$, con estado η.

Notar que los autovalores de A_0 son los ceros de $N(s)$, o sea, de $H(s)$. Entonces $H(s)$ puede realizarse como

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_0\eta + B_0 C_c \xi \\ \dot{\xi} &= A_c\xi + B_c(\lambda^{\mathrm{T}}\xi - b_m C_0\eta + b_m u) \\ y &= C_c\,\xi \end{aligned} \tag{9.22}$$

Usando la estructura de (A_c, B_c, C_c) es fácil verificar que

$$y^{(r)} = \lambda^{\mathrm{T}}\xi - b_m C_0 \eta + b_m u$$

El control («linealizante» entrada-salida)

$$u = \frac{1}{b_m}[-\lambda^{\mathrm{T}}\xi + b_m C_0 \eta + v]$$

resulta en el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_0\eta + B_0 C_c \xi \\ \dot{\xi} &= A_c\xi + B_c v \\ y &= C_c\,\xi\end{aligned}$$

cuya función transferencia de v a y es una cadena de r integradores, y cuyo subvector de estado η es inobservable desde y.

Supongamos que queremos estabilizar al sistema con una realimentación $v = K\xi$, tal que $A_c + B_c K$ sea Hurwitz. El correspondiente sistema a lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix}\dot{\eta} \\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_0 & B_0 C_c \\ 0 & A_c + B_c K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta \\ \xi\end{bmatrix} \tag{9.23}$$

Sabemos que para cualquier condición inicial $\xi(0)$ tenemos que $\xi(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Notemos que los estados η tienen como entrada la salida $y = C_c\xi$.

> Para asegurar que $\eta(t)$ se mantenga acotada para toda evolución acotada de $y(t)$ es necesario que A_0 sea Hurwitz, es decir, los ceros de $H(s)$ deben tener parte real negativa.

Vemos que la matriz de evolución en (9.23) tiene una forma triangular en bloques, y por lo tanto los autovalores de todo el sistema son la unión de los autovalores de los bloques diagonales A_0 y $A_c + B_c K$. Es decir, este control diseñado siguiendo el procedimiento de linealización entrada-salida ubica r autovalores del sistema a lazo cerrado como los autovalores de $A_c + B_c K$, y los restantes $n - r$ autovalores iguales a los ceros del sistema a lazo abierto.

Caso no lineal

Busquemos una versión no lineal del modelo (9.22). Las variables ξ se toman igual que en el caso lineal, ya que la transformación de entrada-salida va a seguir siendo una cadena de r integradores. Para elegir las variables η, va a ser importante respetar la característica fundamental del modelo (9.22), que es que *la entrada u no aparece en la ecuación de η.* Tomamos entonces

$$z = T(x) = \begin{bmatrix}\phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-r}(x) \\ \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_r(x)\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}\phi(x) \\ \psi(x\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}\eta \\ \xi\end{bmatrix} \tag{9.24}$$

donde $\psi_1(x) = h(x)$ y $\psi_{i+1}(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x)\,, i = 1, 2, \ldots, r-1$, y las ϕ_i se eligen tales que $T(x)$ sea un difeomorfismo en un dominio $D_x \in D_0$ y

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0\,, \qquad 1 \leq i \leq n-r\,, \forall x \in D_x. \tag{9.25}$$

Esto siempre es posible para sistemas mono-entrada con grado relativo r. La condición (9.25) asegura que $\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)$ no depende de u.

En las nuevas variables el sistema queda en la *forma normal*

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \\ y &= C_c\, \xi \end{aligned} \tag{9.26}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^r$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, (A_c, B_c, C_c) son la forma canónica de una cadena de r integradores y

$$\begin{aligned} f_0(\eta, \xi) &= \left.\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)\right|_{x = T^{-1}(z)} \\ \beta(x) &= \frac{1}{(\partial \psi_r / \partial x) g(x)} \qquad\qquad \alpha(x) = -\frac{(\partial \psi_r / \partial x) f(x)}{(\partial \psi_r / \partial x) g(x)} \end{aligned} \tag{9.27}$$

Notar que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ no dependen de la elección de ϕ. La estructura del sistema en forma normal se representa (en coordenadas z) en el diagrama de bloques de la Figura 9.2.

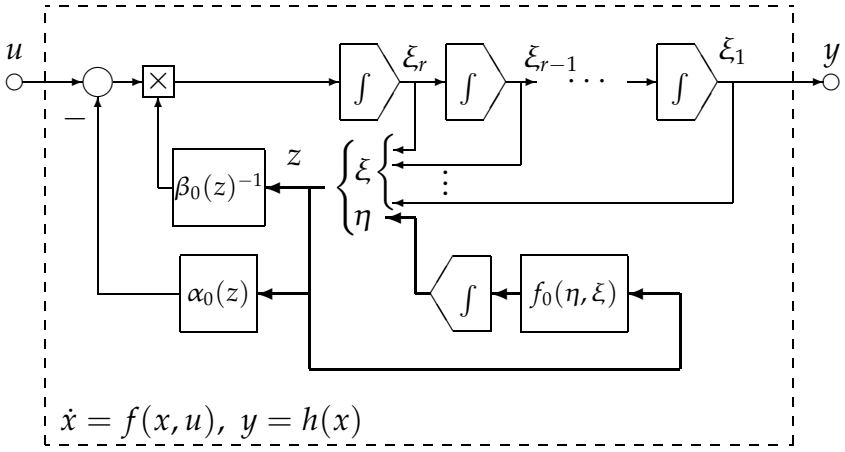

Figura 9.2: Sistema en forma normal

9.2.2. Dinámica de los Ceros

La forma normal (9.26) tiene una parte «externa», representada por las variables ξ, y una parte «interna», representada por las variables η. El control $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ linealiza la parte externa y hace inobservable la parte interna. Haciendo $\xi = 0$ en la primera ecuación tenemos la *dinámica de los ceros*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \tag{9.28}$$

que es la contraparte no lineal de $\dot{\eta} = A_0\eta$, donde los autovalores de A_0 son los ceros de $H(s)$. El sistema se dice de *mínima fase* si la dinámica de los ceros tiene un PE AE en el dominio de interés.

La ecuación (9.28) representa la dinámica de los ceros en las nuevas variables. Podemos también caracterizarla en las coordenadas originales. Notar que

$$y(t) \equiv 0 \implies \xi(t) \equiv 0 \implies u(t) \equiv \alpha(x(t)).$$

Entonces, mantener la salida idénticamente cero implica que la solución de la ecuación de estados debe quedar confinada al conjunto

$$Z^* = \{x \in D_0 \mid \psi_1(x) = \psi_2(x) = \cdots = \psi_r(x) = 0\},$$

y la entrada debe ser

$$u = u^*(x) \triangleq \alpha(x)\big|_{x\in Z^*}.$$

La dinámica de los ceros es entonces la dinámica restringida

$$\dot{x} = f^*(x) = [f(x) + g(x)\alpha(x)]\big|_{x\in Z^*}.$$

Ejemplo 9.9 (Sistema de mínima fase). Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} u \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1 x_3 + u \\
y &= x_2
\end{aligned}$$

que tiene un PE en el origen. Las derivadas de la salida son

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x}_2 = x_3 \\
\ddot{y} &= \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u
\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema tiene GR 2 en $\mathbb{R}^3$. Las variables ψ de la transformación (9.24) son $\psi_1(x) = x_2$ y $\psi_2(x) = x_3$. Usando (9.27) obtenemos

$$\beta = 1, \qquad \alpha = -x_1 x_3$$

Para caracterizar la dinámica de los ceros en las coordenadas originales, restringimos el estado al conjunto

$$Z^* = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

y tomamos $u = u^*(x) = 0$. Esto da como resultado

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

lo que muestra que el sistema es de mínima fase. Para llevar al sistema a la forma normal tenemos que elegir la función $\phi(x)$ de la transformación (9.24) tal que

$$\phi(0) = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = 0$$

y tal que $T(x)$ sea un difeomorfismo en algún dominio que contenga al origen. La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{2+x_3^2}{1+x_3^2}+\frac{\partial \phi}{\partial x_3}=0$$

puede resolverse por el método de separación de variables; esto da

$$\phi(x)=-x_1+x_3+\arctan x_3$$

que satisface la condición $\phi(0)=0$. La transformación $T(x)$ es un difeomorfismo global, ya que para cualquier $z\in\mathbb{R}^3$, la ecuación $T(x)=z$ tiene una solución única. Por lo tanto, la forma normal

$$\begin{aligned}\dot\eta &= (-\eta-\xi_2+\arctan\xi_2)\left(1+\frac{2+\xi_2^2}{1+\xi_2^2}\xi_2\right)\\ \dot\xi_1 &= \xi_2\\ \dot\xi_2 &= (-\eta-\xi_2+\arctan\xi_2)\,\xi_2+u\\ y &= \xi_1\end{aligned}$$

está definida en forma global. ○

9.3. Control por Realimentación de Estados

9.3.1. Estabilización

Consideremos el sistema linealizable entrada-estado

$$\dot z = Az+B\beta(x)^{-1}[u-\alpha(x)]\,,\qquad z=T(x)$$

donde $T(x)$ es un difeomorfismo en un dominio $D_x\subset\mathbb{R}^n$, $D_z=T(D_x)$ contiene al origen, (A,B) es controlable, $\beta(x)$ es no singular para todo $x\in D_x$, y α y β son continuamente diferenciables. Diseñamos K tal que $A+BK$ es Hurwitz. El control

$$u=\alpha(x)+\beta(x)KT(x)$$

da el sistema lineal a lazo cerrado

$$\dot z=(A+BK)z \tag{9.29}$$

Este resultado, sin embargo, está basado en la cancelación exacta de términos no lineales. En general, debido a incertidumbre paramétrica y errores computacionales, el control va a implementar en la realidad funciones $\hat\alpha$, $\hat\beta$ y $\hat T$, que son aproximaciones de las ideales α, β y T. Es decir, el control real va a tener la forma

$$u=\hat\alpha(x)+\hat\beta(x)K\hat T(x)$$

El sistema a lazo cerrado con este control es entonces

$$\dot z=Az+B\beta(x)^{-1}[\hat\alpha(x)+\hat\beta(x)K\hat T(x)-\alpha(x)]$$

Sumando y restando el término BKz, podemos re-escribir la ecuación anterior como

$$\dot{z} = (A + BK)z + B\delta(z)$$

donde

$$\delta(z) = \beta(x)^{-1}\left\{\hat{\alpha}(x) - \alpha(x) + [\hat{\beta}(x) - \beta(x)]KT(x) + \hat{\beta}(x)K[\hat{T}(x) - T(x)]\right\}\Big|_{x=T^{-1}(z)}$$

Vemos que el sistema a lazo cerrado es una perturbación del sistema nominal (9.29). Sea $P = P^{\mathrm{T}}$ la solución de la ecuación de Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)P^{\mathrm{T}} = -I$$

y supongamos que en un entorno del origen el término de error satisface

$$\|\delta(z)\|_2 \leq \gamma_1\|z\|_2 + \gamma_2\,, \qquad \gamma_1\,, \gamma_2 > 0$$

Usando $V(z) = z^{\mathrm{T}}Pz$ como candidata a función de Lyapunov para el sistema a lazo cerrado tenemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= -\|z\|_2^2 + 2z^{\mathrm{T}}PB\delta(z)\\ &\leq -\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_1\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2\\ &= -(1 - 2\|PB\|_2\gamma_1)\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2\end{aligned}$$

Si

$$\gamma_1 < \frac{1}{4\,\|PB\|_2}$$

tenemos que

$$\dot{V}(z) \leq -\frac{1}{2}\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2 < 0\,, \qquad \forall\,\|z\|_2 \geq 4\|PB\|_2\gamma_2$$

lo que demuestra que las trayectorias del sistema perturbado son acotadas con cota final proporcional a γ_2.

9.3.2. Sistema Parcialmente Linealizable

Consideremos ahora el caso en que el sistema es linealizable sólo parcialmente, es decir, la ecuación de estado tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi)\\ \dot{\xi} &= A\xi + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)]\end{aligned} \tag{9.30}$$

donde

$$z = T(x) = \begin{bmatrix}\eta\\ \xi\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}T_1(x)\\ T_2(x)\end{bmatrix}$$

$T(x)$ es un difeomorfismo en un dominio $D_x \subset \mathbb{R}^n$, $D_z = T(D_x)$ contiene al origen, (A, B) es controlable, $\beta(x)$ es no singular para todo $x \in D_x$, $f_0(0,0) = 0$, y $f_0(\eta, \xi)$, $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son continuamente diferenciables. La forma (9.30) está basada en la forma normal (9.26),

pero en este caso no consideramos la salida porque no juega ningún papel en el problema de estabilización.

El control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K\xi = \alpha(x) + \beta(x)KT_2(x) \tag{9.31}$$

con K tal que $A + BK$ es Hurwitz, lleva el sistema a la forma triangular

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A + BK)\xi \end{aligned} \tag{9.32}$$

donde el subsistema ξ es tiene un PE GAE en $\xi = 0$. Para analizar la estabilidad de todo el sistema (9.32) vamos a usar los resultados de la Sección §5.3 del Capítulo 5. El sistema (9.32) va a tener un PE AE en el origen si el subsistema η es (localmente) ISS cuando ξ se considera su entrada. El Lema 5.3 garantiza que el subsistema η de (9.32) es localmente ISS si el sistema no forzado

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

tiene un PE AE en $\eta = 0$. Por lo tanto,

> un sistema linealizable entrada-salida que sea mínima fase es localmente estabilizado asintóticamente por el control (9.31).

Para probar estabilización asintótica global debemos garantizar que el subsistema η de (9.32) sea ISS (globalmente). Usando el Lema 5.4 vemos que esto es así, por ejemplo, si el origen de $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ es globalmente exponencialmente estable y $f_0(\eta, \xi)$ es globalmente Lipschitz en (η, ξ), aunque estas condiciones son bastante exigentes.

Si el origen de $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ es GAE, se podría pensar que el sistema triangular (9.32) se estabilizaría globalmente si los estados ξ decaen a cero arbitrariamente rápido. Esto indicaría que la solución de $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ se aproxima rápidamente a la de $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$, que tiende a cero. Vamos a ver en el ejemplo siguiente que esta no es necesariamente una buena estrategia debido al fenómeno de *peaking*.

Ejemplo 9.10 (Peaking). Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\frac{1}{2}(1 + \xi_2)\eta^3 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 &= v. \end{aligned}$$

El control lineal

$$v = -\gamma^2\xi_1 - 2\gamma\xi_2 \triangleq K\xi$$

asigna los autovalores de $A + BK$ en $(-\gamma, -\gamma)$.

Para la condición inicial $\eta(0) = \eta_0$, $\xi_1(0) = 1$, $\xi_2(0) = 0$, el estado ξ_2 tiene la evolución

$$\xi_2(t) = -\gamma^2 t e^{-\gamma t}$$

obtendríamos el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = -\gamma x - bx^3,$$

cuyo origen es globalmente asintóticamente estable y sus trayectorias se aproximan al origen más rápido que las de $\dot{x} = -\gamma x$. Más aún, el control lineal es más simple de implementar y usa menos esfuerzo de control. ○

La idea del ejemplo anterior es ilustrar que la teoría de linealización por realimentación da una herramienta muy valiosa para representar al sistema en una forma en la que todos los términos alineales entran a la ecuación de estado en el mismo punto en que entra el control. En el próximo capítulo vamos a ver técnicas que explotan esta estructura. La misma estructura permite que se puedan cancelar las alinealidades por realimentación, pero, no hay que perder de vista, dado el ejemplo anterior, que esta no siempre es la alternativa más adecuada.

9.3.3. Regulación con Acción Integral

Usando el esquema de la sección anterior — linealización exacta por realimentación más diseño de una ganancia de realimentación de estados lineal — podemos diseñar un sistema para regular la salida y a un valor constante de referencia y_R, como se muestra en la Figura 9.3. La ganancia estática $N = -[C(A + BK)^{-1}B]^{-1}$ sirve, como en el caso lineal, para compensar el error estático de seguimiento.

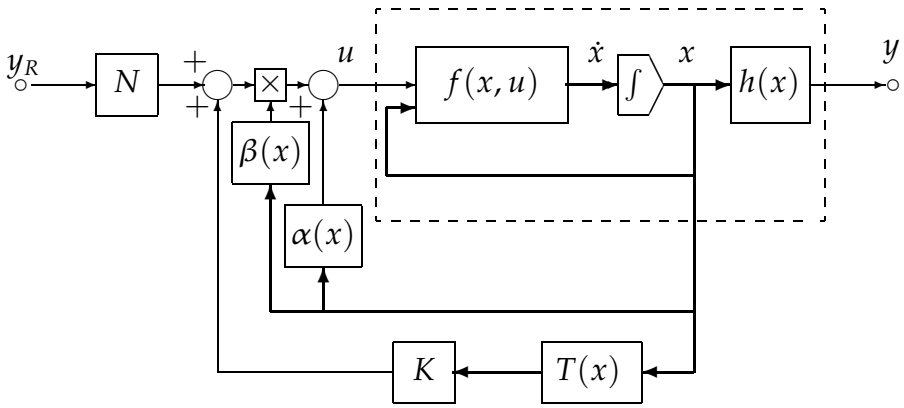

Figura 9.3: Esquema de regulación vía linealización exacta

Como en el caso lineal, también podemos agregar acción integral al esquema de la Figura 9.3 para lograr regulación de la salida en forma robusta. Consideramos el sistema mono-entrada mono-salida, linealizable entrada-salida, y representado en la forma normal (9.26)

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\
\dot{\xi} &= A_c\xi + B_c\frac{1}{\beta(x)}[u - \alpha(x)] \\
y &= C_c\xi.
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que $f_0(0,0) = 0$. Pretendemos diseñar un control de forma que la salida y siga en forma asintótica una referencia constante y_R usando acción integral para preservar regulación aún en presencia de incertidumbres paramétricas.

Además de asumir que el vector de estados es medible, suponemos que la salida es también físicamente medible — no es suficiente calcular y de x usando $y = h(x)$, ya que si hubiera incertidumbres en h podríamos perder la regulación.

Integramos entonces el error de seguimiento $e = y - y_R$ aumentando el sistema con el integrador $\dot{\sigma} = e$, obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R)\\ \dot{\xi}_a &= \mathcal{A}\xi_a + \mathcal{B}\frac{1}{\beta(x)}[u - \alpha(x)],\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ C_c & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_R = \begin{bmatrix} y_R \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r\times 1}, \quad e = \xi - \mathcal{Y}_R, \quad \text{y} \quad \xi_a = \begin{bmatrix} e \\ \sigma \end{bmatrix}.$$

Notar que el agregado de la ecuación de $\dot{\sigma}$ no modifica la estructura de la forma normal. El par de matrices aumentadas $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es controlable, como puede verificarse, y por lo tanto podemos calcular una matriz K tal que $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ sea Hurwitz, procediendo en forma idéntica a como hicimos en la sección anterior. Particionando $K = [K_1 \;\; K_2]$, donde $K_1 \in \mathbb{R}^{1\times r}$ y $K_2 \in \mathbb{R}$, armamos el control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\{K_1[T_2(x) - \mathcal{Y}_R] + K_2\sigma\},$$

que da el lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R)\\ \dot{\xi}_a &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}K)\xi_a.\end{aligned}$$

El esquema de regulación con acción integral se representa en la Figura 9.4.

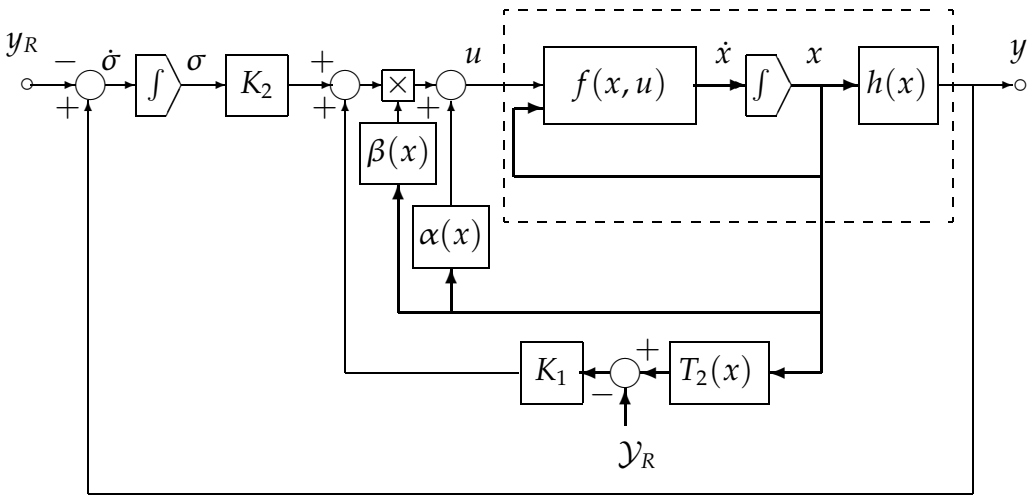

Figura 9.4: Regulador con acción integral vía linealización por realimentación

Para sistemas de mínima fase, la ecuación $\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R)$ es localmente ISS y el control calculado resuelve el problema de regulación local. Una condición suficiente para obtener seguimiento global es pedir que el sistema $\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R)$ sea ISS.

Bibliografía

Bay, John S. (1999). *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill.

Chen, Chi-Tsong (1999). *Linear System Theory and Design*. 3rd ed.. Oxford University Press.

Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.

Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.

Isidori, A., A.J. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco (1981). Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **26**, 331–345.

Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.

Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.

Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.

Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.

Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.

Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.

Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.

Sontag, E.D. and Y. Wang (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters* **24**, 351–359.

van der Schaft, A. J. (2000). *L_2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.

Wonham, W. M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Third Edition*. Springer-Verlag.

Índice alfabético

Banach, *véase* espacio de Banach
Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii

Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy
causalidad, 87
centro, 13
Chetaev, *véase* teorema de Chetaev
ciclo límite, 20
clausura, 27
condición de Lipschitz, 29
conjunto cerrado, 27
control adaptable, 10
convergencia de secuencias, 27
Coulomb, *véase* fricción de Coulomb

desigualdad de Gronwall-Bellman, 26
desigualdad de Hölder, 25
desigualdad de Hamilton-Jacobi, 94
difeomorfismo, 138
dinámica de los ceros, 148
diodo túnel, 6, 17

ecuación de Lienard, 9
ecuación de sensibilidad, 39
ecuación de Van der Pol, 9, 21
ensilladura, 11
equilibrios
    definición, 4
    hiperbólicos, 16
    múltiples, 16
    perturbación, 14
espacio de Banach, 27
espacio lineal normado, 27
espacios de señales, 85
estabilidad, 42
Estabilidad $\mathcal{L}$
    en variable de estado, 90
estabilidad $\mathcal{L}$, 87
estabilidad asintótica global, 49
estabilidad de sistemas perturbados, 75
estabilidad entrada-estado, 80
estabilidad estrada-salida, 87
estabilidad estructural, 16
estabilidad exponencial, 68
    robusta, 76
estabilidad uniforme, 67

foco, 13
forma de Jordan, 16
forma normal, 148
fricción de Coulomb, 8
fricción estática, 8
función de Lyapunov, 44
función de sensibilidad, 39
función definida positiva, 45
funciones de clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$, 67

ganancia de un sistema, 88
grado relativo, 143
Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman

Hölder, *véase* desigualdad de Hölder
Hamilton-Jacobi, *véase* desigualdad de Hamilton-Jacobi

inestabilidad, 42, 50
ISS, *véase* estabilidad entrada-estado

Jacobiana, 19
Jordan, *véase* forma de Jordan

LaSalle, *véase* teorema de LaSalle
Lienard, *véase* ecuación de Lienard
linealización
    análisis de puntos de equilibrio, 17
    y estabilidad, 59
Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz
Lyapunov
    función, 44
    método directo, 43
    método indirecto, 62
    superficie, 44
    teorema de estabilidad, 43, 65
    teoremas conversos, 71

método del gradiente variable, 47

método indirecto de Lyapunov, 62
mínima fase, 148
mapa contractivo, 27
matriz Jacobiana, 19

nodo, 11
norma, 27

operador, 85
oscilador
    armónico, 20
    de relajación, 21
    de resistencia negativa, 9
    de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol

péndulo, 5, 17
perturbación de equilibrios, 14
principio de comparación, 39
principio de invariancia, 52
    sistemas inestacionarios, 72
punto fijo, 27
puntos de equilibrio, 4

región de atracción, 49, 56
retrato de fase, 11
    construcción numérica, 21

secuencia convergente, 27
secuencia de Cauchy, 27
sensibilidad, 39
separatriz, 17
sistema linealizable entrada-estado, 138
sistema masa-resorte, 7
superficie de Lyapunov, 44

teorema de Barbashin-Krasovskii, 49
teorema de Chetaev, 50
teorema de estabilidad de Lyapunov, 43
teorema de LaSalle, 53
teoremas conversos, *véase* Lyapunov

Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol