

Capítulo 10

Diseños Basados en Lyapunov

El método de Lyapunov, originalmente utilizado como herramienta de análisis de sistemas, es además una herramienta útil en el diseño de control por realimentación. Existen muchos métodos basados en la idea de diseñar el control de forma que la derivada de una función de Lyapunov tenga ciertas propiedades que garanticen estabilidad de las trayectorias del sistema a lazo cerrado con respecto a un punto o un conjunto de equilibrios. En este capítulo presentamos dos métodos de este tipo. El primero (§10.1) es el método de *rediseño Lyapunov por amortiguamiento no lineal* («nonlinear damping»), que permite robustificar un diseño dado para que tolere cierto tipo de incertidumbres y errores de modelado que satisfacen la *condición de apareamiento* («matching condition») — es decir, incertidumbre y errores que ocurren en el mismo punto del lazo donde se aplica el control. El segundo método (§10.2) es *backstepping*, un poderoso método recursivo que permite obtener diseños robustos frente a incertidumbres y errores que no necesariamente satisfagan la condición de apareamiento. Referimos a Khalil (1996, Capítulo 13) para ver otras técnicas basadas en Lyapunov, como *rediseños Lyapunov*, que generalizan la idea de amortiguamiento no lineal, y el *control adaptable*, que muestra una aplicación práctica de los teoremas de invariancia vistos en §4.11.

10.1. Rediseño Lyapunov por Amortiguamiento No Lineal

Consideremos el sistema afín en el control

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)[u + \Gamma(t, x)\delta(t, x, u)], \quad (10.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $u \in \mathbb{R}^p$ la entrada de control. Las funciones f , g , Γ y δ están definidas para $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times \mathbb{R}^p$, donde $D \in \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen. Asumimos que f , g , Γ y δ son seccionalmente continuas en t y localmente Lipschitz en x y u para todo (t, x, u) en el dominio de interés.

Asumimos que las funciones f , g y Γ son conocidas, mientras que δ representa incertidumbres de modelado, y de la cual sólo se sabe que es uniformemente acotada para todo (t, x, u) . Las incertidumbres representadas en δ tienen una estructura especial: satisfacen la *condición de apareamiento* — vale decir que afectan a la ecuación de estado en los mismos puntos que lo hace la entrada de control.

Suponiendo que se conoce un control por realimentación de estados $u = \psi(t, x)$ que alcanza estabilidad asintótica global del origen del sistema *nominal*

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \quad (10.2)$$

pretendemos *rediseñar* u de forma de *robustificar* el diseño nominal y hacer que el sistema a lazo cerrado preserve sus propiedades de estabilidad frente a las incertidumbres δ .

Sea entonces $\psi(t, x)$ tal que el origen de

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)\psi(t, x) \quad (10.3)$$

es globalmente asintóticamente estable, y sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov conocida que satisface

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f(t, x) + g(t, x)\psi(t, x)] \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (10.5)$$

para todo $[t, x] \in [0, \infty) \times D$, donde α_1, α_2 y α_3 son funciones clase \mathcal{K}_∞ .

Consideremos el sistema (10.1) y apliquemos el control $u = \psi(t, x) + v$. El sistema a lazo cerrado obtenido,

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)\psi(t, x) + g(t, x)[v + \Gamma(t, x)\delta(t, x, \psi(t, x) + v)], \quad (10.6)$$

es una perturbación del sistema a lazo cerrado nominal (10.3). Calculemos la derivada de V a lo largo de las trayectorias de (10.6),¹

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f + g\psi] + \frac{\partial V}{\partial x}g[v + \Gamma\delta] \\ &\leq -\alpha_3 + \frac{\partial V}{\partial x}g[v + \Gamma\delta]. \end{aligned}$$

Introduzcamos la notación $w^T \triangleq \frac{\partial V}{\partial x}g$, con la que la desigualdad anterior queda

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 + w^T v + w^T \Gamma \delta.$$

Tomando

$$v = -\gamma w \|\Gamma\|_2^2, \quad \gamma > 0, \quad (10.7)$$

obtenemos

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 - \gamma \|w\|_2^2 \|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2 \|\Gamma\|_2 k,$$

donde k es una cota (desconocida pero finita) de $\|\delta\|$. El término

$$-\gamma \|w\|_2^2 \|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2^2 \|\Gamma\|_2 k$$

alcanza un máximo $\frac{k^2}{4\gamma}$ en $\|w\|_2 \|\Gamma\|_2 = \frac{k}{2\gamma}$. Por lo tanto,

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \frac{k^2}{4\gamma}.$$

Como α_3 es clase \mathcal{K}_∞ , \dot{V} siempre será negativa fuera de alguna bola, con lo que las soluciones del sistema a lazo cerrado serán uniformemente acotadas. El rediseño de Lyapunov (10.7) se llama *amortiguamiento no lineal*. Resumimos nuestras conclusiones en el siguiente lema.

¹Para simplificar la notación omitimos la dependencia de las variables t y x .

Lema 10.1 (Amortiguamiento no lineal). Sea el sistema (10.1) y sea $\psi(t, x)$ un control por realimentación estabilizante para el sistema nominal (10.2) con función de Lyapunov $V(t, x)$ que satisface (10.4)–(10.5) para todo $t \geq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, con ciertas funciones $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ y $\alpha_3(\cdot)$ clase \mathcal{K}_∞ . Supongamos que el término de incertidumbres δ es uniformemente acotado para $(t, x, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Sea v dada por (10.7) y $u = \psi(t, x) + v$. Entonces, para cualquier $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ la solución del sistema a lazo cerrado es uniformemente acotada. \circ

Ejemplo 10.1 (Robustificación por amortiguamiento no lineal). Sea el sistema escalar

$$\dot{x} = x^3 + u + x\delta(t)$$

donde $\delta(t)$ es una función acotada de t . Con el control estabilizante $\psi(x) = -x^3 - x$, la función de Lyapunov $V(x) = x^2$ satisface (10.4)–(10.5) globalmente con $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = \alpha_3(r) = r^2$. La componente de amortiguamiento no lineal (10.7), con $\gamma = 1$, es $v = -2x^3$. El sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = -x - 2x^3 + x\delta(t)$$

tiene soluciones acotadas independientemente de cuan grandes sean las perturbaciones δ , gracias al término de amortiguamiento no lineal $-2x^3$. \circ

10.2. Backstepping

Backstepping es un procedimiento recursivo que combina la elección de una función de Lyapunov con el diseño de un control en realimentación. Descompone el problema original en una secuencia de problemas de diseño para sistemas orden reducido (que hasta pueden llegar a ser escalares). Explotando la flexibilidad adicional que existe con sistemas de bajo orden y escalares, backstepping a menudo puede resolver problemas de estabilización, seguimiento y control robusto bajo condiciones menos restrictivas que las encontradas en otros métodos.

10.2.1. Backstepping de un integrador

Introducimos la técnica de backstepping en el caso especial de *backstepping de un integrador*. Consideremos el sistema

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \xi \tag{10.8}$$

$$\dot{\xi} = u \tag{10.9}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$ son los estados y $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. Las funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ son suaves en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a $\eta = 0$, y $f(0) = 0$. Queremos diseñar un control por realimentación de estados que estabilice el origen $\eta = 0$, $\xi = 0$.

El sistema (10.8)–(10.9) puede pensarse como la conexión en cascada de dos componentes, como se ve en la Figura 10.1. La primera componente es (10.8), con ξ como entrada, y la segunda es el integrador (10.9).

Supongamos que sabemos que la componente (10.8) puede estabilizarse con un control suave $\xi = \phi(\eta)$, con $\phi(0) = 0$, vale decir, el origen de

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$$

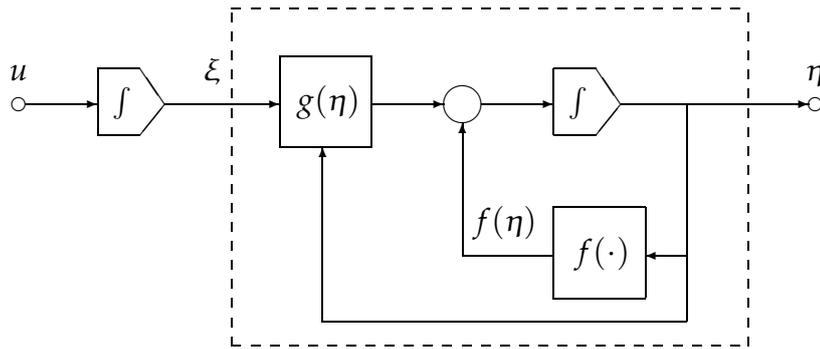


Figura 10.1: Diagrama de bloques del sistema (10.8)–(10.9)

es asintóticamente estable. Más aún, supongamos que se conoce una función de Lyapunov $V(\eta)$ (suave, definida positiva) que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D, \tag{10.10}$$

donde $W(\eta)$ es definida positiva. Sumando y restando $g(\eta)\phi(\eta)$ al lado derecho de (10.8), obtenemos la representación equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta) [\xi - \phi(\eta)] \\ \dot{\xi} &= u, \end{aligned}$$

que se muestra en la Figura 10.2.

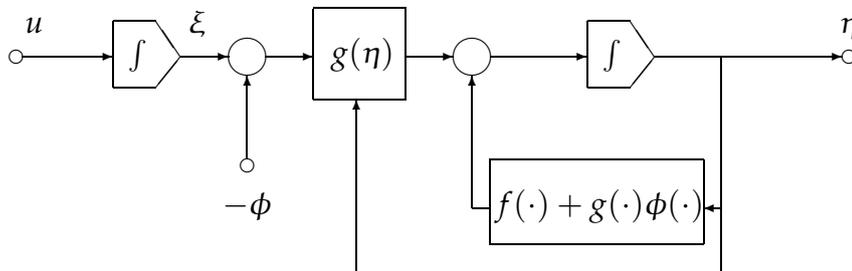


Figura 10.2: Introducción de $\phi(\eta)$

Con el cambio de variables

$$z = \xi - \phi(\eta), \quad v = u - \dot{\phi},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta) z \\ \dot{z} &= v, \end{aligned} \tag{10.11}$$

que se muestra en la Figura 10.3. Notar que, como f, g y ϕ son conocidas, podemos calcular la derivada $\dot{\phi}$ usando la expresión

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi].$$

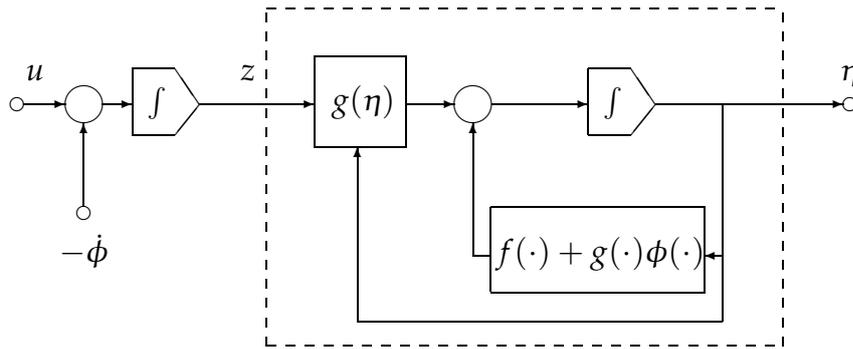


Figura 10.3: «Backstepping» de $-\phi(\eta)$ a través del integrador

El sistema (10.11) tiene la misma estructura que el sistema original, pero ahora la primera componente $\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z$ tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen cuando su entrada z es cero. Esta característica va a ser explotada en el diseño de un control v que estabilice todo el sistema.

Consideremos como candidata a función de Lyapunov para (10.11) la función

$$V_a(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2 \quad (10.12)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (10.11) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + z v \\ &\leq -W(\eta) + \left[\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) + v \right] z. \end{aligned}$$

Elijiendo

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k z, \quad k > 0$$

obtenemos

$$\dot{V}_a \leq -W(\eta) - k z^2,$$

que muestra que el origen $\eta = 0, z = 0$ es asintóticamente estable. Como $\phi(0) = 0$, concluimos que el origen $\eta = 0, \xi = 0$ es asintóticamente estable. Substituyendo las expresiones de v, z y $\dot{\phi}$, obtenemos el control en realimentación de estados

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)] \quad (10.13)$$

Si las hipótesis valen globalmente y $V(\eta)$ es radialmente no acotada, concluimos que el origen es globalmente asintóticamente estable. Esta técnica se denomina *integrator backstepping*² ya que el control virtual $\xi = \phi(\eta)$ se «corre» un integrador para atrás para obtener el control real u (ver la secuencia en las Figuras 10.1, 10.2 y 10.3). Resumimos el resultado en el siguiente lema.

²De «step back an integrator»: retroceder un integrador.

Lema 10.2 (Backstepping de un integrador). Sea el sistema (10.8)–(10.9). Sea $\phi(\eta)$ un control por realimentación de estados estabilizante para (10.8) con $\phi(0) = 0$ y sea $V(\eta)$ una función de Lyapunov que satisface (10.10) con alguna función definida positiva $W(\eta)$. Entonces, el control por realimentación de estados (10.13) estabiliza el origen de (10.8)–(10.9) con $V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2$ como función de Lyapunov. Además, si todas las hipótesis valen globalmente y $V(\eta)$ es radialmente no acotada, el origen será globalmente asintóticamente estable. \circ

Ejemplo 10.2. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

que tiene la forma (10.8) con $\eta = x_1$ y $\xi = x_2$. Empezamos con el sistema escalar

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2,$$

tomando a x_2 como entrada, y diseñamos un control $x_2 = \phi(x_1)$ que estabilice el origen $x_1 = 0$. Tomamos, por ejemplo

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1$$

y $V(x_1) = x_1^2/2$, que satisfacen

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 \leq -x_1^2, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

El control por backstepping (10.13) para este ejemplo es

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial V}{\partial x_1} - [x_2 - \phi(x_1)] \\ &= -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1)\end{aligned}\tag{10.14}$$

y la función de Lyapunov total (10.12) es

$$V_a(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1^2 + x_1)^2\tag{10.15}$$

\circ

Para sistemas de mayor orden, se puede aplicar backstepping en forma recursiva, como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.3. El sistema de tercer orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

está formado por el sistema de segundo orden del ejemplo anterior con un integrador adicional a la entrada. Por el ejemplo anterior sabemos que el subsistema formado por las dos primeras ecuaciones puede estabilizarse con el control virtual (10.14), o sea

$$x_3 = -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1) \triangleq \phi_1(x_1, x_2)$$

y (10.15) es la función de Lyapunov correspondiente. Ahora podemos considerar al sistema de tercer orden como un caso especial del sistema (10.8)–(10.9) con

$$\eta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \xi = x_3 \quad f = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y aplicar nuevamente backstepping. El control u de la forma (10.13) es entonces

$$u = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - [x_3 - \phi_1(x_1, x_2)]$$

donde V_1 está dada por (10.15), y la función de Lyapunov total es

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2} [x_3 - \phi_1(x_1, x_2)]$$

◊

10.2.2. Backstepping de sistemas en realimentación estricta

Más generalmente, backstepping de un integrador puede aplicarse al sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta) \xi \\ \dot{\xi} &= f_a(\eta, \xi) + g_a(\eta, \xi) u \end{aligned} \quad (10.16)$$

donde f_a, g_a son suaves y $g_a(\eta, \xi) \neq 0$ en el dominio de interés. Notar que el segundo subsistema de (10.16) no es un integrador «puro» sino un integrador «perturbado» por la presencia de las alinealidades f_a y g_a . Esta «perturbación» es fácilmente manejable, sin embargo, mediante la transformación de entrada

$$u = \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} [u_a - f_a(\eta, \xi)], \quad (10.17)$$

que reduce al segundo subsistema de (10.16) al integrador puro $\dot{\xi} = u_a$. Si conocemos, como antes, el par de funciones $\phi(\eta)$ y $V(\eta)$ correspondientes a la estabilización del primer subsistema de (10.16), podemos tomar u_a igual al control (10.13), y combinándolo con (10.17) obtener el control por backstepping para (10.16)

$$u = \phi_a(\eta, \xi) \triangleq \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)] - f_a(\eta, \xi) \right\}, \quad (10.18)$$

con $k > 0$. La correspondiente función de Lyapunov total es

$$V_a(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2} [\xi - \phi(\eta)]^2. \quad (10.19)$$

Aplicando recursivamente el control por backstepping de un integrador, pueden estabilizarse sistemas en forma de *realimentación estricta* («strict feedback»)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2) \xi_3 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= f_{n-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) + g_{n-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \xi_n \\ \dot{\xi}_n &= f_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n) + g_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n) u \end{aligned} \quad (10.20)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $u, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$, y las funciones f_0, \dots, f_n se anulan en el origen. Asumimos que $g_i(x, \xi_1, \dots, \xi_i) \neq 0$ en el dominio de interés, para $i = 1, \dots, n$. La razón por la cual llamamos a sistemas de este tipo en realimentación estricta es que las funciones f_i y g_i en las n ecuaciones de $\dot{\xi}_i$ dependen sólo de x, ξ_1, \dots, ξ_i , es decir, sólo de variables que son realimentadas.

El procedimiento recursivo de backstepping comienza, como antes, con el sistema

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) \xi_1$$

donde ξ_1 se considera la entrada de control virtual. Asumimos que es posible encontrar un control $\xi_1 = \phi_0(x)$, con $\phi_0(0) = 0$, y una función de Lyapunov $V_0(x)$ tal que

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x) \phi_0(x)] \leq -W_0(x)$$

en el dominio de interés para alguna función $W_0(x)$ definida positiva.

El siguiente paso es considerar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2 \end{aligned}$$

que está en la forma (10.16) con $\eta = x$, $\xi = \xi_1$, $u = \xi_2$, $f = f_0$, $g = g_0$, $f_a = f_1$ y $g_a = g_1$. Usando (10.18) y (10.19), tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_1(x, \xi_1) &= \frac{1}{g_1} \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial x} (f_0 + g_0 \xi_1) - \frac{\partial V_0}{\partial x} g_0 - k_1 (\xi_1 - \phi_0) - f_1 \right], \quad k_1 > 0 \\ V_1(x, \xi_1) &= V_0(x) + \frac{1}{2} [\xi_1 - \phi_0(x)]^2 \end{aligned}$$

son el control estabilizante y la correspondiente función de Lyapunov para este sistema.

Luego consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2) \xi_3 \end{aligned}$$

como un caso particular de (10.16) para

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \xi_2, \quad f = \begin{bmatrix} f_0 + g_0 \xi_1 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}, \quad f_a = f_2, \quad g_a = g_2.$$

Usando (10.18) y (10.19), obtenemos el control estabilizante y la correspondiente función de Lyapunov para este sistema

$$\begin{aligned} \phi_2(x, \xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{g_2} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} (f_0 + g_0 \xi_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} (f_1 + g_1 \xi_2) - \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} g_1 - k_2 (\xi_2 - \phi_1) - f_2 \right], \quad k_2 > 0 \\ V_2(x, \xi_1, \xi_2) &= V_1(x, \xi_1) + \frac{1}{2} [\xi_2 - \phi_1(x, \xi_1)]^2 \end{aligned}$$

y así el procedimiento se repite n veces hasta obtener un control estabilizante $u = \phi_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$ y la función de Lyapunov correspondiente $V_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$ para el sistema completo.

Ejemplo 10.4. El sistema mono-entrada mono-salida en la forma normal especial

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
 \dot{\xi}_r &= [u - \alpha(x, \xi_1, \dots, \xi_r)] / \beta(x, \xi_1, \dots, \xi_r) \\
 y &= \xi_1
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

es un caso particular de la forma (10.20). Si el sistema es mínima fase, el origen de la dinámica de los ceros $\dot{x} = f_0(x)$ es asintóticamente estable, y en el primer paso de backstepping podemos tomar simplemente $\phi_0(x) = 0$, y $V_0(x)$ cualquier función de Lyapunov para la dinámica de los ceros. Si el sistema es no-mínima fase, lo que vimos en este capítulo muestra que backstepping puede estabilizar al sistema si podemos resolver el problema de estabilización de la dinámica de los ceros.

Por ejemplo, si la primera ecuación de (10.21) es

$$\dot{x} = -x + x^2 \xi_1$$

el sistema es mínima fase ya que la dinámica de los ceros $\dot{x} = -x$ es globalmente exponencialmente estable. Entonces podemos iniciar el procedimiento de backstepping a través de los r integradores con $\phi_0(x) = 0$ y $V_0(x) = x^2/2$, por ejemplo.

Por otro lado, si la primera ecuación de (10.21) es

$$\dot{x} = x^2 - x \xi_1 \tag{10.22}$$

el sistema es de no mínima fase ya que la dinámica de los ceros $\dot{x} = x^2$ es inestable. En este caso tenemos que resolver primero el problema de estabilización del sistema (10.22) con entrada ξ_1 . Un posible par ϕ_0, V_0 para este sistema es $\phi_0(x) = x + x^2$ y $V_0(x) = x^2/2$; luego se continua con el procedimiento de backstepping. \circ

Bibliografía

- Bay, John S. (1999). *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill.
- Chen, Chi-Tsong (1999). *Linear System Theory and Design*. 3rd ed.. Oxford University Press.
- Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.
- Isidori, A., A.J. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco (1981). Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **26**, 331–345.
- Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.
- Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.
- Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.
- Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.
- Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.
- Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.
- Sontag, E.D. and Y. Wang (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters* **24**, 351–359.
- van der Schaft, A. J. (2000). *L₂-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.
- Wonham, W. M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Third Edition*. Springer-Verlag.

Índice alfabético

- amortiguamiento no lineal, 157
- backstepping, 159
 - de sistemas en realimentación estricta, 163
 - de un integrador, 159
- Banach, *véase* espacio de Banach
- Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii
- Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy
- causalidad, 87
- centro, 13
- Chetaev, *véase* teorema de Chetaev
- ciclo límite, 20
- clausura, 27
- condición de apareamiento, 157
- condición de Lipschitz, 29
- conjunto cerrado, 27
- control adaptable, 10, 157
- convergencia de secuencias, 27
- Coulomb, *véase* fricción de Coulomb
- desigualdad de Gronwall-Bellman, 26
- desigualdad de Hölder, 25
- desigualdad de Hamilton-Jacobi, 94
- difeomorfismo, 138
- dinámica de los cerros, 148
- diodo túnel, 6, 17
- ecuación de Lienard, 9
- ecuación de sensibilidad, 39
- ecuación de Van der Pol, 9, 21
- ensilladura, 11
- equilibrios
 - definición, 4
 - hiperbólicos, 16
 - múltiples, 16
 - perturbación, 14
- espacio de Banach, 27
- espacio lineal normado, 27
- espacios de señales, 85
- estabilidad, 42
- Estabilidad \mathcal{L}
 - en variable de estado, 90
 - estabilidad \mathcal{L} , 87
- estabilidad asintótica global, 49
- estabilidad de sistemas perturbados, 75
- estabilidad entrada-estado, 80
- estabilidad entrada-salida, 87
- estabilidad estructural, 16
- estabilidad exponencial, 68
 - robusta, 76
- estabilidad uniforme, 67
- foco, 13
- forma de Jordan, 16
- forma normal, 148
- fricción de Coulomb, 8
- fricción estática, 8
- función de Lyapunov, 44
- función de sensibilidad, 39
- función definida positiva, 45
- funciones de clase \mathcal{K} y \mathcal{KL} , 67
- ganancia de un sistema, 88
- grado relativo, 143
- Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman
- Hölder, *véase* desigualdad de Hölder
- Hamilton-Jacobi, *véase* desigualdad de Hamilton-Jacobi
- inestabilidad, 42, 50
- ISS, *véase* estabilidad entrada-estado
- Jacobiana, 19
- Jordan, *véase* forma de Jordan
- LaSalle, *véase* teorema de LaSalle
- Lienard, *véase* ecuación de Lienard
- linealización
 - análisis de puntos de equilibrio, 17
 - y estabilidad, 59
- Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz
- Lyapunov
 - función, 44
 - método directo, 43

- método indirecto, 62
- superficie, 44
- teorema de estabilidad, 43, 65
- teoremas conversos, 71

- método del gradiente variable, 47
- método indirecto de Lyapunov, 62
- mínima fase, 149
- mapa contractivo, 27
- matriz Jacobiana, 19

- nodo, 11
- norma, 27

- operador, 85
- oscilador
 - armónico, 20
 - de relajación, 21
 - de resistencia negativa, 9
 - de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol

- péndulo, 5, 17
- perturbación de equilibrios, 14
- principio de comparación, 39
- principio de invariancia, 52
 - sistemas inestacionarios, 72
- punto fijo, 27
- puntos de equilibrio, 4

- rediseño Lyapunov, 157
- región de atracción, 49, 56
- retrato de fase, 11
 - construcción numérica, 21

- secuencia convergente, 27
- secuencia de Cauchy, 27
- sensibilidad, 39
- separatriz, 17
- sistema en realimentación estricta, 163
- sistema linealizable entrada-estado, 138
- sistema masa-resorte, 7
- superficie de Lyapunov, 44

- teorema de Barbashin-Krasovskii, 49
- teorema de Chetaev, 50
- teorema de estabilidad de Lyapunov, 43
- teorema de LaSalle, 53
- teoremas conversos, *véase* Lyapunov

- Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol