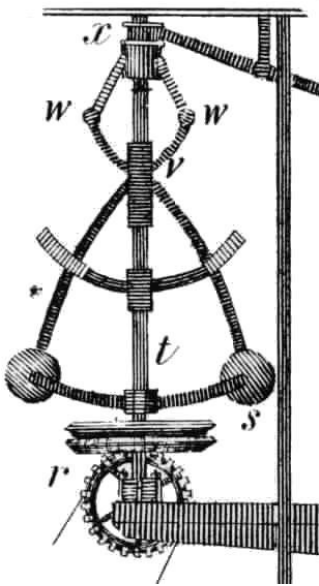


Parametrización Afín de Controladores SISO

Virginia Mazzone



Regulador centrífugo de Watt

Control Automático 1
<http://iaci.unq.edu.ar/caut1>
Automatización y Control Industrial
Universidad Nacional de Quilmes
Marzo 2002

Índice General

1	Contenidos	1
2	Revisión de Inversión a Lazo Abierto	2
3	Parametrización Afín. Caso Estable	2
3.1	La parametrización	2
3.2	Consideraciones de Diseño	3
3.3	Ceros de No Mínima Fase (NMF)	3
3.4	Grado Relativo del Modelo	4
3.5	Rechazo de Perturbaciones	4
3.6	Esfuerzo de Control	6
3.7	Robustez	7
3.8	Elección de Q . Resumen para los Casos de Polos Estable a Lazo Cerrado.	7
4	Síntesis del PID utilizando la Parametrización Afín	7
4.1	Modelos de planta para Control PID	7
4.2	Modelos de Primer Orden	8
4.3	Modelos de Segundo Orden	9
4.4	Modelos con Retardo Temporal utilizando Aproximación Padé	10
5	Parametrización Afín para Sistemas con Retardo	11
6	Polos No Deseados a Lazo Cerrado	13
6.1	Restricciones de Interpolación	13
6.2	Revisión de Diseño de PID	14
6.3	Modelos con Integrador	15
7	Parametrización Afín. Caso Inestable	17

1 Contenidos

Como sabemos, existen muchos métodos para diseño de controladores de diferente tipo. Teniendo en cuenta esto, quisiéramos saber si es posible encontrar una forma sencilla de especificar todos los controladores que, por lo menos, estabilicen un sistema dado. En este apunte veremos una forma bastante simple de describir todos los controladores que estabilizan tanto un lazo abierto estable como una planta lineal inestable. Esto conduce a una parametrización afín de todas las *funciones de sensibilidad* nominales posibles. Las principales ideas de este apunte incluyen:

- motivación para la parametrización afín y la idea de inversión a lazo abierto
- parametrización afín y Modelo Interno de Control
- parametrización afín y especificaciones de diseño
- ajuste de PID utilizando parametrización afín
- control de plantas con retardo temporales y parametrización afín. Conexiones con el controlador Smith
- interpolación para eliminar polos no deseados a lazo abierto

Este apunte es una síntesis y traducción del Capítulo 15 del libro *Control System Design* de G. Goodwin, S. Graebe y M. Salgado [1].

2 Revisión de Inversión a Lazo Abierto

Será conveniente desarrollar una idea alternativa del problema de diseño de control para la que remarcaremos la noción de la inversión del modelo de la planta, para diseñar un controlador.

A lazo abierto, la entrada de control, $U(s)$, puede ser generada de la señal de referencia, $R(s)$, por la función transferencia $Q(s)$. Esto lleva a una función transferencia del tipo

$$T_0(s) = G_0(s)Q(s). \quad (2.1)$$

Esta ecuación es la base de la parametrización afín tratada en este apunte y donde se deduce la importancia de que la planta sea inversible, ya que $T(j\omega)$ será 1 solo para aquellas frecuencias donde $Q(j\omega)$ invierte al modelo.

Por otro lado, con un controlador convencional con realimentación, $K(s)$, la función de transferencia a lazo cerrado es

$$T_0(s) = \frac{G_0(s)K(s)}{1 + G_0(s)K(s)}. \quad (2.2)$$

La expresión anterior es no lineal con respecto a $K(s)$. Por lo que la idea es entonces conseguir mantener la simpleza de la ecuación (2.1) en una forma más general para realimentación. Si pudiéramos elegir $K(s)$ de forma tal que (2.1) sea igual a (2.2), resulta que

$$Q(s) = \frac{K(s)}{1 + G_0(s)K(s)}. \quad (2.3)$$

Esta será la idea que seguiremos en este apunte. Para el diseño de $Q(s)$ nos basaremos en la idea de inversión en (2.1) y luego usaremos (2.3) para determinar los valores correspondientes de $K(s)$.

3 Parametrización Afín. Caso Estable

3.1 La parametrización

Nuestro punto de partida será la relación (2.3) entre $Q(s)$ y $K(s)$. Podemos invertir esta relación para expresar $K(s)$ en función de $Q(s)$ y $G_0(s)$,

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)}. \quad (3.1)$$

Dicha ecuación es conocida como la parametrización de Youla de todos los controladores estabilizadores y para todas las plantas estables.

Lema 1 (Parametrización afín para sistemas estables). Consideremos una planta con su modelo nominal estable, $G_0(s)$ controlado en una arquitectura de realimentación de un grado de libertad con un controlador propio. El lazo nominal de la figura es internamente estable si y solo si $Q(s)$ es cualquier función transferencia estable y propia cuando la función transferencia del controlador $K(s)$ es parametrizada como en (3.1).

Demostración. Primero escribimos las cuatro funciones de sensibilidad definidas anteriormente utilizando la ecuación (3.1)

$$T_0(s) = Q(s)G_0(s) \quad (3.2)$$

$$S_0(s) = 1 - Q(s)G_0(s) \quad (3.3)$$

$$S_{i0}(s) = [1 - Q(s)G_0(s)]G_0(s) \quad (3.4)$$

$$S_{u0}(s) = Q(s) \quad (3.5)$$

Por hipótesis el modelo nominal de la planta $G_0(s)$ es estable, por lo que $Q(s)$ es necesariamente estable para estabilidad interna (de la última ecuación). Observando todas las ecuaciones de sensibilidad, se observa que la condición de estabilidad de $Q(s)$ es, además suficiente. \square

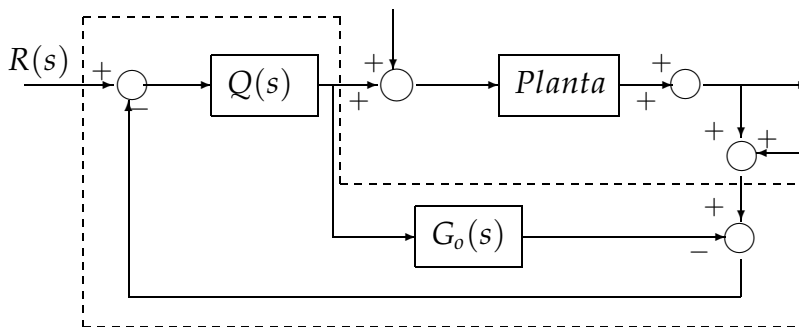


Figura 1: Parametrización de Youla de todos los controladores para plantas estables

3.2 Consideraciones de Diseño

De las ecuaciones (3.2) a la (3.5), vemos que con la elección de $Q(s)$ podemos construir una de las cuatro funciones de sensibilidad. Las tres restantes quedarán especificadas con esta elección. Tomemos como objetivo seleccionar $S_0(s)$. Una la condición típica es que $|S_0(j\omega)|$ sea pequeño para bajas frecuencias y luego tender a 1 para altas frecuencias y $|T_0(j\omega)|$ decrezca para altas frecuencias, lo que es normalmente requerido para asegurarse que ruido de alta frecuencia sea rechazado por el lazo de control y para proveer robustez al modelado de errores.

Bajo estas condiciones, una elección razonable para $Q(s)$ puede ser

$$Q(s) = F_Q(s)[G_0(s)]^{-1}, \tag{3.6}$$

donde $[G_0(s)]^{-1}$ es exactamente la inversa del modelo de la planta, $G_0(s)$. La función transferencia $F_Q(s)$ es la responsable del diseño del controlador, la que deberemos acomodar para que satisfaga consideraciones de diseño. En particular detallaremos las siguientes:

- ceros de fase no mínima
- grado relativo del modelo
- rechazo de perturbaciones
- esfuerzo de control
- robustez

3.3 Ceros de No Mínima Fase (NMF)

Recordemos que dada $G_0(s)$ estable, entonces solo se necesita que $Q(s)$ sea estable para asegurar estabilidad a lazo cerrado. Esto implica que si $G_0(s)$ tiene ceros NMF, éstos no pueden estar incluidos en $[G_0(s)]^{-1}$ en la ecuación (3.6). En estos casos reemplazaremos la ecuación (3.6) por

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s), \tag{3.7}$$

donde $G_0^i(s)$ es una aproximación estable de $[G_0(s)]^{-1}$. Por ejemplo, si factorizamos $G_0(s)$ como

$$G_0(s) = \frac{B_{0e}(s)B_{0n}(s)}{A_0(s)},$$

donde $B_{0e}(s)$ y $B_{0n}(s)$ son los factores estables y no estables del numerador, respectivamente, con $B_{0n}(0) = 1$, entonces una elección de $G_0^i(s)$ podría ser

$$G_0^i(s) = \frac{A_0(s)}{B_{0e}(s)}. \tag{3.8}$$

3.4 Grado Relativo del Modelo

Para obtener un controlador propio es necesario que $Q(s)$ sea propia. Por eso, observando (3.7) y (3.8), es necesario que la forma del filtro, $F_Q(s)$, tenga grado relativo por lo menos igual al negativo de $[G_0^i(s)]^{-1}$. Conceptualmente, esto puede ser posible incluyendo factores del tipo $(\tau s + 1)^{n_d}$ ($\tau \in \mathbb{R}$) en el denominador. De modo que n_d es elegido para hacer que $Q(s)$ sea por lo menos bipropia, y τ debería ser elegida para satisfacer compromisos en el diseño.

3.5 Rechazo de Perturbaciones

(a) Errores en el Régimen Permanente

Los errores en el régimen permanente causados por perturbaciones en la entrada y en la salida pueden reducirse a cero si $Q(j\omega)$ es exactamente la inversa de $G_0(j\omega)$ en todas las bandas de frecuencias donde las perturbaciones de entrada y/o salida tienen energía significativa. La parametrización afín puede ser generalizada para incluir el caso cuando las energías de la perturbación de entrada y salida están concentradas en una determinada frecuencia conocida. Específicamente, tenemos de

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)}, \quad (3.9)$$

que el controlador tiene acción integral si $Q(0) = [G_0(0)]^{-1}$.

Lema 2. Dado un modelo estable $G_0(s)$ con perturbaciones (entrada y/o salida) en la frecuencia cero. Un lazo de un grado de libertad, con error de seguimiento nulo en el régimen permanente, es estable sí y sólo sí el controlador $K(s)$ puede ser expresado como en la ecuación (3.9) donde $Q(s)$ satisface

$$Q(s) = s\bar{Q}(s) + [G_0(0)]^{-1}Q_a(s), \quad (3.10)$$

donde $\bar{Q}(s)$ es cualquier función de transferencia estable, y $Q_a(s)$ es cualquier función de transferencia estable que satisface $Q_a(0) = 1$.

Demostración.

- \Leftarrow) Vemos que si $\bar{Q}(s)$ y $Q_a(s)$ son estables, entonces $Q(s)$ lo es también y esto implica que el lazo es estable. También vemos que (3.10) implica que $K(s)$ contiene un integrador.
- \Rightarrow) Consideremos un controlador que estabiliza el modelo a lazo cerrado y con error en el régimen permanente igual a cero para $\omega = 0$. Esto equivale a decir que la función de sensibilidad complementaria es igual a 1 para $\omega = 0$. De la ecuación (3.2) vemos que esto es equivalente a tener $Q(0) - [G_0(0)]^{-1} = 0$, es decir que $Q(s) - [G_0(0)]^{-1}$ es una función arbitrariamente estable que tiene un cero en $s = 0$. Dicha función se podrá escribir como

$$Q(s) - [G_0(0)]^{-1} = s \left[\bar{Q}(s) + \frac{Q_b(s)}{s} \right] \quad \text{donde} \quad Q_b(0) = 0.$$

Esta ecuación muestra que cualquier $Q(s)$ que de error cero en el régimen permanente para referencias constantes y/o perturbaciones, puede ser escrito como

$$Q(s) = s\bar{Q}(s) + [G_0(0)]^{-1}[1 + G_0(s)Q_b(s)] \quad \text{donde} \quad Q_b(0) = 0.$$

Por lo que $Q_a(s) = 1 + G_0(s)Q_b(s)$.

□

Nota 1. Observemos que la elección más simple en (3.10) será $Q_a(s) = 1$.

Lema 3. Dado un modelo estable $G_0(s)$ y supongamos que las perturbaciones de entrada tienen componentes de frecuencia en $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$. Un lazo de control de un grado de libertad produce un error de seguimiento en régimen permanente igual a cero si, y solo si, el controlador $K(s)$ puede ser expresado de la forma (3.9) donde $Q(s)$ satisface

$$Q(s) = \frac{N_Q(s)}{D_Q(s)} = \frac{N_1(s) \prod_{i=1}^l (s^2 + \omega_i^2) + N_2(s)}{D_Q(s)},$$

donde $N_Q(s)$, $N_1(s)$, $N_2(s)$ y $D_Q(s)$ son polinomios reales en s con $D_Q(s)$ estable y

$$N_2(j\omega) = D_Q(j\omega_i)[G_0(j\omega_i)]^{-1} \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Nota 2. Notemos que en (3), una posible elección para $N_2(s)$ es

$$N_2(s) = \bar{D}_Q(s) \sum_{i=1}^{2l} (\tau j\omega_i + 1)^{2l-1} [G_0(j\omega_i)]^{-1} \prod_{k \in \Omega_{2l,i}} \frac{s - j\omega_k}{j\omega_i - j\omega_k},$$

donde $\tau > 0$, $\omega_{l+i} = -\omega_i$ para $i = 1, 2, \dots, l$; $\Omega \triangleq \{1, 2, \dots, 2l\} - \{i\}$ y $D_Q(s) = \bar{D}_Q(s)(\tau s + 1)^{2l-1}$.

Entonces podemos parametrizar $Q(s)$ como

$$Q(s) = \bar{Q}(s) \prod_{i=1}^l (s^2 + \omega_i^2) + \sum_{i=1}^{2l} [G_0(j\omega_i)]^{-1} \prod_{k \in \Omega_{2l,i}} \frac{s - j\omega_k}{j\omega_i - j\omega_k}.$$

(b) Compromisos de Rechazos de Perturbaciones

Si nos centralizamos en las perturbaciones y ruido solamente, vimos que la respuesta de salida nominal en función de las funciones de sensibilidad, viene dada por

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= -T_0(s)D_n(s) + S_0(s)D_0(s) + S_{i0}(s)D_i(s) \\ &= -Q(s)G_0(s)D_n(s) + (1 - Q(s)G_0(s))D_0(s) + (1 - Q(s)G_0(s))G_0(s)D_i(s). \end{aligned}$$

Con la elección de (3.7) y (3.8), obtenemos

$$\begin{aligned} Y_0(s) &= -(F_Q(s)B_{0n}(s))D_n(s) + (1 - F_Q(s)B_{0n}(s))D_0(s) \\ &\quad + (1 - F_Q(s)B_{0n}(s))G_0(s)D_i(s). \end{aligned}$$

Un compromiso más sutil hay entre D_0 y D_i . Podemos usar $F_Q(s)$ para cancelar cualquier polo deseado a lazo abierto en $S_i(s)$, pero esos polos necesariamente aparecen como ceros de S_0 . (en el capítulo 9.6.2)

Ejemplo 1 (Planta de fase no mínima). Sea un lazo de control de un grado de libertad donde el modelo de la planta nominal viene dado por

$$G_0(s) = \frac{-s + 2}{(s + 2)(s + 1)}.$$

Supongamos que hay perturbaciones a las salidas, sin cambios abruptos. El ruido de medición es una señal con energía significativa solo para frecuencias menores a 5[rad/seg].

Diseñar un controlador $K(s)$ utilizando la parametrización afín, de forma tal que la salida del controlador $u(t)$ no contenga componentes de ruido significativos.

Solución.

Considerando solo la naturaleza de las perturbaciones de salida, necesitamos que:

- El controlador incluya un integrador, que $Q(0) = [G_0(0)]^{-1}$, para asegurar que el error en régimen permanente sea cero.
- El ancho de banda a lazo cerrado debe ser lo más amplia posible para compensar perturbaciones rápidas.

El ruido requiere que $\omega_c = 5[\text{rad/seg}]$. La componente del ruido en la salida del controlador, viene dada por (3.5), por lo que $F_Q(s)$ debe ser un filtro pasa-bajo con una frecuencia de corte $\omega_c = 5[\text{rad/seg}]$ que elegimos un filtro *Butterworth* de 4º orden. Los coeficientes de $F_Q(s)$ los obtenemos con MATLAB de la siguiente forma

```
[B,A]=butter(4, 5, 's');
```

```
B = 0          0          0          0          625.0000
A =1.0000    13.0656    85.3553    326.6407    625.0000
```

$$F_Q(s) = \frac{625}{s^4 + 13.0656s^3 + 85.3553s^2 + 326.6407s + 625} \quad (3.11)$$

de (3.8) obtenemos que $G_0^i(s) = (s+2)(s+1)$ y reemplazando en (3.7) tenemos que

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s) = \frac{625(s+2)(s+1)}{s^4 + 13.0656s^3 + 85.3553s^2 + 326.6407s + 625}. \quad (3.12)$$

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)} = \frac{625(s+2)(s+1)}{s^4 + 13.0656s^3 + 85.3553s^2 + 951.6407s - 625} \quad (3.13)$$

3.6 Esfuerzo de Control

De la función de sensibilidad $S_0(s) = 1 - Q(s)G_0(s)$, vemos que si $S_0 = 0$ para una frecuencia dada, entonces $QG_0 = 1$, lo que implica ganancia infinita en el controlador $K(s)$ a la misma frecuencia. Por ejemplo, tomemos una planta de fase mínima, podemos elegir $G_0^i(s) = G_0^{-1}(s)$. Entonces tenemos

$$K(s) = \frac{F_Q(s)G_0^i(s)}{1 - F_Q(s)}. \quad (3.14)$$

Si elegimos

$$F_Q(s) = \frac{1}{1 - (\tau s - 1)^r}, \quad (3.15)$$

la ganancia del controlador a alta frecuencia, K_{caf} y la ganancia del modelo a alta frecuencia, K_{gaf} , están relacionadas de la siguiente forma

$$K_{caf} = \frac{1}{\tau^r \cdot K_{gaf}}. \quad (3.16)$$

Así, si hacemos $F_Q(s)$ más rápido, (más pequeño), K_{caf} crece. Lo que implica que la energía de control crece. Esta consecuencia puede ser apreciada del hecho que, bajo la suposición de que $G_0(s)$ es mínima fase y estable, tenemos que

$$S_{u0}(s) = Q(s) = \frac{[G_0(s)]^{-1}}{(\tau s + 1)^r}. \quad (3.17)$$

3.7 Robustez

Eligiendo $Q(s)$ como en (3.7), tenemos que $T_0(s) = F_Q(s)B_{0n}(s)$. Así, el pedido de ser robusto puede ser satisfecho si $F_Q(s)$ disminuye la ganancia de $T_0(\omega_j)$ en frecuencias altas. Esto es alcanzado eligiendo en forma apropiada los polos de $F_Q(s)$. Claro que, reduciendo $|T_0(\omega_j)|$ a un valor $\ll 1$ para alguna frecuencia, necesariamente significa que $S_0(s)$ tiende a 1 para frecuencias más grandes que las mismas.

3.8 Elección de Q . Resumen para los Casos de Polos Estable a Lazo Cerrado.

Hemos visto que una elección de $Q(s)$ es simplemente la inversa de la función transferencia de la planta alazo abierto. Esta solución "ideal" necesita ser modificada para tener en cuenta:

- **Ceros no-mínima fase.** Como la estabilidad interna previene la cancelación de estos ceros, estos aparecerán en $T_0(s)$. Lo que implica que la ganancia de $Q(s)$ deberá ser reducida a estas frecuencias para evitar la degradación de la respuesta transitoria [Ver transparencias de la Clase 12: *Limitaciones Fundamentales de Diseño*].
- **Grado relativo.** Los polos en exceso en el modelo fijarán necesariamente una cota inferior para el grado relativo de $T_0(s)$, ya que $Q(s)$ debe ser propia para asegurar que el controlador $K(s)$ sea propio.
- **Compromiso de perturbaciones.** Cuando $T_0(s)$ empieza a decaer para satisfacer el rechazo del ruido de medición, necesariamente aumentamos sensibilidad de las perturbaciones de salida a esa frecuencia. También, los polos lentos a lazo abierto deben aparecer como polos tanto en $S_{i0}(s)$ o como ceros de $S_0(s)$, y en ambos casos hay un costo en el desempeño.
- **Energía de control.** Todas las plantas son típicamente pasa-bajos típicos. Por lo tanto, el hacer $Q(s)$ cercana a una inversa de la planta le da característica pasa-altos, que puede llevar a grandes valores de la señal de control y consiguiente saturación de actuadores.
- **Robustez.** Los errores de modelado son significativos a altas frecuencias, por lo que para mantener robustez es necesario atenuar T_0 , y por lo tanto también Q , a estas frecuencias.

4 Síntesis del PID utilizando la Parametrización Afín

En esta parte veremos una aplicación de la parametrización afín utilizándola para desarrollar estrategias de ajuste para controladores PI y PID cuando todos los polos son estables.

Ese diseño del PID es posible seleccionando $Q(s)$, no es sorpresa desde ya que (3.1) cubre todos los controladores para una planta estable a lazo abierto y debe incluir la arquitectura del PID cuando sea aplicado a una planta estable.

4.1 Modelos de planta para Control PID

Consideremos los siguientes modelos de plantas

$$G_0(s) = \frac{K_0}{v_0s + 1} \quad \text{primer orden} \quad (4.1)$$

$$G_0(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{v_0s + 1} \quad \text{primer orden con retardo temporal} \quad (4.2)$$

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0s + \omega_0^2} \quad \text{2 grados relativos resonantes} \quad (4.3)$$

$$G_0(s) = \frac{K_0(b_0s + 1)}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0s + \omega_0^2}; b_0 > 0 \quad \text{1 grado relativo} \quad (4.4)$$

$$G_0(s) = \frac{K_0(-b_0s + 1)}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0s + \omega_0^2}; b_0 > 0 \quad \text{no mínima fase} \quad (4.5)$$

Los coeficientes de los modelos anteriores se asumen positivos.

4.2 Modelos de Primer Orden

Consideremos el modelo (4.1). Como no tiene ceros inestables, el modelo es exactamente inversible, elijamos

$$G_0^i(s) = [G_0(s)]^{-1} = \frac{v_0s + 1}{K_0}$$

Para que $Q(s)$ sea bipropia, $F_Q(s)$ deberá tener grado relativo 1,

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}.$$

Así,

$$Q(s) = F_Q(s)G_0^i(s) = \frac{v_0s + 1}{K_0(\alpha s + 1)}, \quad (4.6)$$

y el controlador (3.1) queda

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0^i(s)} = \frac{v_0s + 1}{K_0\alpha s} = \frac{v_0}{K_0\alpha} + \frac{1}{K_0\alpha s},$$

que es un controlador PI con

$$K_P = \frac{v_0}{K_0\alpha} \quad \text{y} \quad K_I = \frac{v_0}{K_0\alpha}. \quad (4.7)$$

Con estos parámetros del controlador, la función de sensibilidad complementaria nominal queda

$$T_0(s) = Q(s)G_0(s) = F_Q(s) = \frac{1}{\alpha s + 1},$$

donde α es un parámetro ajustable. Para valores de α pequeños, el lazo es más rápido, y para valores de α grandes, el lazo lento. Con este controlador, las perturbaciones de salidas son rechazadas con la función de sensibilidad nominal

$$S_0(s) = 1 - T_0(s) = 1 - F_Q(s) = \frac{\alpha s}{\alpha s + 1}.$$

Una vez más, eligiendo α pequeño las perturbaciones de salida son rechazadas más rápido que para un valor de α grande. Este efecto se puede ver en la Figura 2, donde se muestra la respuesta a una perturbación de salida escalón para valores de $\alpha = 0.1, 0.5, 1.0$ y 2.0 .

El parámetro α no puede ser elegido arbitrariamente pequeño por las limitaciones de los actuadores y las consideraciones de robustez [Ver las transparencias correspondientes a la Clase 10: *Limitaciones Fundamentales de Diseño*]. La relación (4.7) nos da un método para diseñar un controlador PI ajustando únicamente un parámetro, α . Más aún, si la constante de tiempo v_0 o la ganancia K_0 dependieran del tiempo de alguna forma conocida, el controlador podría ser fácilmente adaptado, ya que K_P y K_I en (4.7) son expresiones explícitas expresados en términos de estos valores.

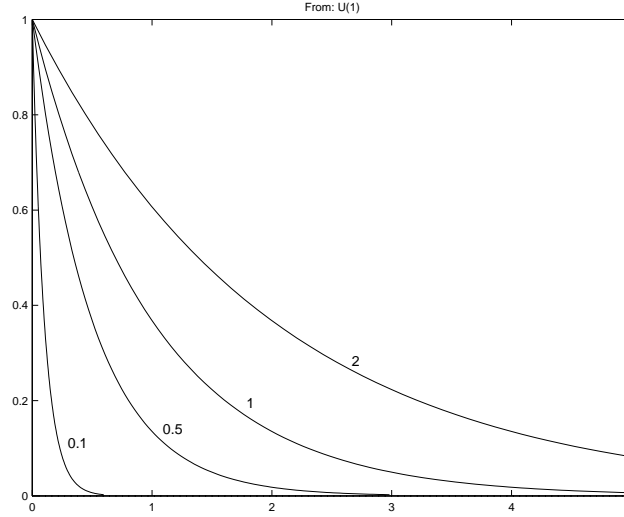


Figura 2: Efecto de α en el rechazo de perturbaciones de salida

4.3 Modelos de Segundo Orden

Consideraremos ahora el diseño del controlador PID para modelos de segundo orden. Durante esta sección, asumiremos que la planta es medianamente bien amortiguada, es decir para valores del factor de amortiguamiento mayores que 0.6.

Consideremos un modelo de grado relativo 2, dado por (4.3), como no tiene ceros inestables, podemos elegir

$$G_0^i(s) = [G_0(s)]^{-1} = \frac{s^2 + 2\zeta_0\omega_0s + \omega_0^2}{K_0}.$$

Para asegurar que $Q(s)$ sea bipropia, $F_Q(s)$ deberá tener grado relativo 2, entonces elijamos

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha_2s^2 + \alpha_1s + 1}. \quad (4.8)$$

Por lo que el controlador con realimentación unitaria queda dado por

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)} = \frac{F_Q(s)G_0^i(s)}{1 - F_Q(s)G_0^i(s)} = \frac{s^2 + 2\zeta_0\omega_0s + \omega_0}{K_0(\alpha_2s^2 + \alpha_1s)},$$

que es un controlador PID con las siguientes ganancias

$$K_P = \frac{2\zeta_0\omega_0\alpha_1 - \alpha_1\omega_0^2}{K_0\alpha_1^2}, \quad K_I = \frac{\omega_0^2}{K_0\alpha_1},$$

$$K_D = \frac{\alpha_1s^2 - 2\zeta_0\omega_0\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2\omega_0^2}{K_0\alpha_1^3}, \quad \tau_D = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Si parametrizamos la función de sensibilidad complementaria del lazo cerrado en términos de la frecuencia deseada a lazo cerrado, ω_{lc} y el factor de amortiguación ψ_{lc} , podemos elegir

$$\alpha_2 = \frac{1}{\omega_{lc}^2}; \quad \alpha_1 = \frac{2\psi_{lc}}{\omega_{lc}},$$

quedando

$$T_0(s) = F_Q(s) = \frac{\omega_{lc}^2}{s^2 + 2\psi_{lc}\omega_{lc}s + \omega_{lc}^2}.$$

Las ganancias en función de ω_{lc} y ψ_{lc} resultan

$$K_P = \frac{4\zeta_0\psi_{lc}\omega_0\omega_{lc} - \omega_0^2}{4K_0\psi_{lc}^2},$$

$$K_I = \frac{\omega_0^2\omega_{lc}}{2K_0\psi_{lc}},$$

$$K_D = \frac{4\psi_{lc}^2\omega_{lc}^2 - 4\zeta_0\psi_{lc}\omega_0\omega_{lc} + \omega_0^2}{8K_0\psi_{lc}^3\omega_{lc}},$$

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{lc}\psi_{lc}}.$$

Comparada con las técnicas clásicas de ajuste de controladores PID, este modelo tiene bastantes ventajas. En particular, las ganancias del PID, son funciones explícitas del modelo a lazo cerrado deseado, permitiendo decisiones de compromiso.

Expresiones similares pueden obtenerse para un modelo de grado relativo 1, dado por (4.4), usando como inversa

$$G_0^i(s) = [G_0(s)]^{-1} = \frac{s^2 + 2\zeta_0\omega_0s + \omega_0^2}{K_0(b_0s + 1)},$$

y filtro de grado relativo 1

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}. \tag{4.9}$$

Para modelos de no mínima fase, dados por (4.5), una inversa apropiada está dada por

$$G_0^i(s) = \frac{s^2 + 2 * \zeta_0\omega_0s + \omega_0^2}{K_0},$$

ya que el cero inestable no se puede invertir. Para asegurar que $Q(s)$ sea bipropia, debemos elegir $F_Q(s)$ de grado relativo 2, por que (4.8) es una buena elección.

El problema aparece en aquellos sistemas de grado relativo 2 levemente amortiguado, es decir con un valor muy pequeño del factor de amortiguamiento ζ_0 . El problema es la sensibilidad en los picos de resonancia, que tienen ganancias grandes para proporciones amortiguadas pequeñas. Esto resulta en una degradación severa del desempeño hasta para errores pequeños en el modelo parametrizado, cuando el lazo cerrado está por debajo de la ubicación de la resonancia del lazo abierto. [Para más detalles ver Sección 15.4.4 de [1]].

4.4 Modelos con Retardo Temporal utilizando Aproximación Padé

Ahora estudiaremos el caso de un modelo de primer orden con retardo temporal, dado por (4.2). La dificultad principal en este tipo de sistemas viene por el factor $e^{-s\tau_0}$, que no es inversible ni racional. Reemplazaremos el factor de retardo por una aproximación *Padé* de primer orden dada por

$$e^{-s\tau_0} \approx \frac{2 - s\tau_0}{2 + s\tau_0}.$$

que reemplazándola en (4.3), obtenemos

$$G_0(s) \approx G_{0p}(s) \triangleq \frac{(-\tau_0 K_0)s + 2K_0}{(\tau_0 v_0)s^2 + (\tau_0 + 2v_0)s + 2}.$$

Como el modelo es estable pero de fase no mínima, usaremos una aproximación de la inversa dada por

$$G_{0p}^i = \frac{(\tau_0 s v_0)s^2 + (\tau_0 + 2v_0)s + 2}{2K_0}.$$

Una $Q(s)$ bipropia se puede obtener eligiendo $F_Q(s)$ de grado relativo 2, es decir,

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}.$$

El controlador en realimentación unitaria está dado por

$$\begin{aligned} C_p(s) &= \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_{0p}(s)} = \frac{F_Q(s)G_{0p}^i(s)}{1 - F_Q(s)G_{0p}^i(s)G_{0p}(s)} \\ &= \frac{(\tau_0 v_0)s^2 + (\tau_0 + 2v_0)s + 2}{(2K_0\alpha_2)s^2 + (2K_0\alpha_1 + \tau_0 K_0)s'} \end{aligned} \quad (4.10)$$

que, de acuerdo al Lema 2 en la página 10 del apunte de clase "Control PID Clásico", es un controlador PID con

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{2\tau_0\alpha_1 + 4v_0\alpha_1 + \tau_0^2 + 2\tau_0v_0 - 4\alpha_2}{4K_0\alpha_1^2 + 4K_0\alpha_1\tau_0 + \tau_0^2K_0}, \\ K_I &= \frac{2}{2K_0\alpha_1 + \tau_0K_0}, \\ K_D &= \frac{(2K_0\alpha_1 + \tau_0K_0)^2(\tau_0v_0)(2K_0\alpha_2)(2K_0\alpha_1 + \tau_0K_0)(\tau_0 + 2v_0) + 8K_0^2\alpha_2^2}{(2K_0\alpha_1 + \tau_0K_0)^3}, \\ \tau_D &= \frac{2\alpha_2}{2\alpha_1 + \tau_0}. \end{aligned}$$

Por lo que podríamos escribir las ganancias del controlador en función de los coeficientes de la ecuación (4.10). De esta forma quedarán escritas en función de los parámetros del modelo y del filtro. Lo tan complicado y la naturaleza no lineal de estas expresiones dan una noción de porque el método de ajuste más utilizado para modelos con retardo es el de prueba y error.

Otra ventaja de esta expresión explícita, es que los retardos temporales son, frecuentemente, variantes el tiempo. Este es el caso, por ejemplo, donde el retardo es debido a una velocidad de transporte que varía con los requerimientos de la producción. Si esta velocidad se puede medir, el retardo temporal puede ser calculado y las ganancias del PID pueden calcularse.

Una aproximación alternativa es el controlador de Smith. La ventaja de este controlador frente al PID, es que evita la aproximación Padé, esto es una ventaja si el retardo temporal, τ_0 , es comparable o mayor que la constante de tiempo dominante del lazo cerrado.

5 Parametrización Afín para Sistemas con Retardo

Un método clásico para tratar con retardos puros fue utilizar un compensador de tiempo muerto. Esta idea fue introducida por Otto Smith en los años 50. En esta sección veremos una interpretación moderna vía parametrización afín.

El controlador de Smith está basado en que el retardo no se puede invertir. La estructura tradicional del controlador de Smith puede ser obtenida del esquema de la Figura 3, que es un caso particular del esquema general de la Figura 1.

En la Figura 3, el modelo nominal está dado por el producto del retardo temporal y una función transferencia racional, es decir

$$G_0(s) = e^{-s\tau} \bar{G}_0(s),$$

entonces, de (2.2), la función de sensibilidad complementaria es

$$T_0(s) = e^{-s\tau} \bar{G}_0(s) Q(s). \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) sugiere que $Q(s)$ debe ser diseñado considerando solo la parte racional del modelo, ya que el retardo no puede ser invertido. Para llevar a cabo el diseño, el procedimiento y criterio vistos anteriormente pueden ser utilizados. En particular, necesitamos una inversa

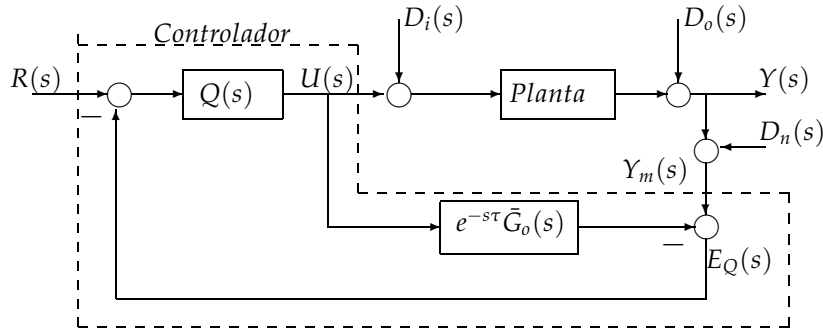


Figura 3: Controlador de Smith

aproximada (estable, causal y propia) para $G_0(s)$. Dado que el retardo no tiene una inversa causal, buscaremos una inversa para $\bar{G}_0(s)$, que puede ser directamente como en la ecuación (3.8), o podemos usar la idea de realimentación para generar una inversa estable. Para ello debemos calcular $Q(s)$ de la siguiente manera

$$Q(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)\bar{G}_0(s)}. \tag{5.2}$$

Cuando $|K(j\omega)|$ es grande, luego $Q(j\omega) \approx [\bar{G}_0(j\omega)]^{-1}$.

Si implementamos $Q(s)$ con la ecuación (5.2), obtenemos la estructura de la Figura 4, que es la forma tradicional del controlador de Smith.

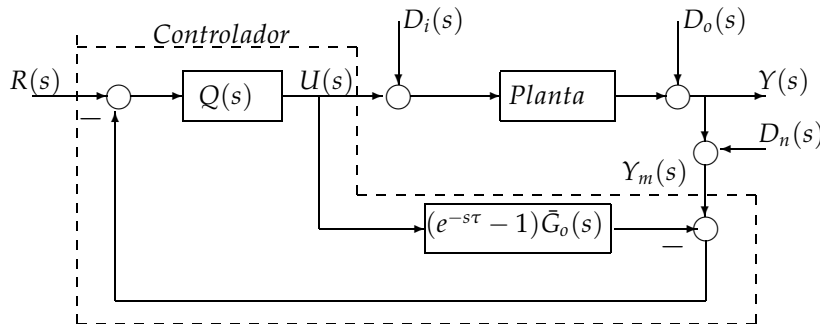


Figura 4: Forma tradicional del controlador de Smith

Ejemplo 2. Consideremos una planta cuyo modelo nominal está dado por

$$G_0(s) = \frac{e^{-s}}{2s + 1}$$

Diseñe un controlador que de un buen seguimiento a referencias en la banda de frecuencia $[0, 1]$ [rad/seg].

Solución.

Utilizaremos la estructura de la Figura 3, y prestaremos atención solo a la parte racional del modelo. Una simple aproximación es hacer

$$Q(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 1.3s + 1},$$

que lleva a

$$T_0(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 1.3s + 1}.$$

6 Polos No Deseados a Lazo Cerrado

6.1 Restricciones de Interpolación

Hasta aquí hemos supuesto que todos los polos de la planta eran estables y así podrían ser tolerados en la función de sensibilidad de entrada a lazo cerrado, $S_{i0}(s)$. Habría que hacer una distinción entre un polo inestable y un polo no deseado. Por ejemplo, un par de polos estables pero que implican una resonancia de amortiguamiento pequeño, es probablemente no deseado. Supongamos, entonces que la planta posee polos a lazo cerrado no deseados (incluyendo no estables). La única forma de sacar dichos polos de la función de sensibilidad complementaria es eligiendo $Q(s)$ de manera tal que contenga estos polos como ceros. Esto implica una cancelación de estos polos en el producto $Q(s)G_0(s)$ y así de $S_0(s)$ y $T_0(s)$. Pero los polos no deseado seguirán apareciendo en la función de sensibilidad de entrada $S_{i0}(s)$, dependiendo de los ceros de $1 - Q(s)G_0(s)$, es decir de los ceros de $S_0(s)$. Para eliminar los polos no deseados de $S_{i0}(s)$ necesitamos asegurar que dichos polos sean también ceros de $[1 - Q(s)G_0(s)]$. El siguiente lema resume las observaciones anteriores.

Lema 4 (Restricciones de interpolación para evitar polos no deseados). Consideremos un lazo de control por realimentación nominal con un grado de libertad, y supongamos que $G_0(s)$ posee polos a lazo cerrado no deseado (incluyendo inestable). Entonces:

- a) Cada función de sensibilidad $T_0(s)$, $S_0(s)$, $S_{i0}(s)$ y $S_{i10}(s)$ no tendrán ningún polo no deseado si y solo si el controlador $K(s)$ es expresado como en (3.1) donde $Q(s)$ satisface lo siguiente:
 - (i) $Q(s)$ es estable y propia y posee solo polos deseados.
 - (ii) Cualquier polo no deseado de $G_0(s)$ son ceros de $Q(s)$ con, por lo menos, la misma multiplicidad que $G_0(s)$.
 - (iii) Cualquier polo no deseado de $G_0(s)$ son ceros de $1 - Q(s)G_0(s)$, con por lo menos la misma multiplicidad que $G_0(s)$.
- b) Cuando las condiciones (ii) y (iii) son satisfechas, todas las cancelaciones de polos y ceros inestables en $K(s)$ inducidas por la ecuación (3.1) deberán ser modificadas analíticamente, antes de la implementación.

Nota 3. En conexión con la parte b), habrá que diferenciar entre una cancelación polo-cero analítica y una implementada. Consideremos el siguiente ejemplo, con estas tres funciones transferencia

$$H(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}, \quad H_1(s) = \frac{4}{(s+1)(-s+2)}, \quad H_2(s) = \frac{(-s+2)}{(s+4)}.$$

Se observa que $H(s) = H_1(s)H_2(s)$. Si la cancelación está hecha antes que la implementación de la función de transferencia $H(s)$ (cancelación analítica), no hay problema. Pero, si implementamos en cascada $H_1(s)$ y $H_2(s)$, aparecerá una inestabilidad interna, ya que la cancelación aparecerá en la implementación.

Ejemplo 3. Consideremos un modelo nominal $G_0(s)$ dado por

$$G_0(s) = \frac{6}{(s+1)(s+6)}.$$

Supongamos que la medición de ruido limita el ancho de banda a $\omega = 10$ [rad/seg]. Bajo estas condiciones, una posible elección de $Q(s)$ es

$$Q(s) = F_Q(s) \frac{(s+1)(s+6)}{6}, \quad \text{donde} \quad F_Q(s) = 1000 \frac{\beta_1 s + 1}{(s^2 + 14s + 100)(s+10)},$$

y β_1 es un coeficiente libre para seleccionar más adelante.

El grado relativo de $F_Q(s)$ se eligió igual a dos para que $Q(s)$ sea bipropia. Como $T_0(s) = F_Q(s)$ la elección de $F_Q(0) = 1$ asegura una inversión exacta en $\omega = 0$, es decir que $K(s)$ tendrá un polo en el origen.

Vemos que el controlador está dado por

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)} = \frac{F_Q(s)[G_0(s)]^{-1}}{1 - F_Q(s)} = 1000 \frac{(\beta_1 s + 1)(s + 1)(s + 6)}{6s(s^2 + 24s + 240 - 1000\beta_1)}.$$

Supongamos que una cancelación simple del polo lento en $s = -1$ en $S_0(s)$ es inadecuada ya que produciría un polo relativamente lento en $S_{i0}(s)$, que producirá una respuesta lenta a perturbaciones de entrada. Para evitar este resultado, se desea forzar a $Q(s)$ para que $s = -1$ sea un cero de $S_0(s)$. Para alcanzar esto, buscamos un valor de β_1 tal que $S_0(-1) = 0$ ($\Leftrightarrow T_0(-1) = F_Q(-1) = 1$), entonces

$$F_Q(-1) = \frac{1000}{783}(1 - \beta_1) = 1 \Rightarrow \beta_1 = \frac{217}{1000}.$$

Observamos que para este valor de β_1 , el denominador de $K(s)$ puede ser factorizado como $6s(s + 23)(s + 1)$, donde $(s + 1)$ cancela el numerador llevando al controlador a

$$K(s) = \frac{(217s + 1000)(s + 6)}{6s(s + 23)}.$$

De esta última ecuación vemos que solo el polo en $s = -6$ será no controlable desde la referencia y controlable desde las perturbaciones de entrada.

6.2 Revisión de Diseño de PID

Volviendo al diseño de la Sección 4.2 donde se utilizaba un PI para plantas de primer orden. Encontramos que dicho diseño (basado en cancelaciones de polos a lazo abierto en $K(s)$) daba un excelente rechazo a perturbaciones de salida. Recordemos que la repuesta a perturbaciones de entradas $Y_d(s)$ está dada por

$$\begin{aligned} Y_d(s) &= S_{i0}(s)D_i(s), \\ S_{i0}(s) &= S_0(s)G_0(s). \end{aligned}$$

Desde ahora, cuando cualquier polo de la planta es cancelado en el controlador, éste continuará siendo controlable desde la perturbación de entrada, y seguirá observable a la salida. La cancelación de polos lentos de esta forma tiene un efecto de deterioro en la respuesta.

Lema 5. Considere el modelo de planta de primer orden vista en (4.1) y la arquitectura de control vista en la Figura 1, donde $Q(s) = [G_0(s)]^{-1}F_Q(s)$. Luego un controlador PI que no cancela el polo de la planta es obtenido como

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}, \quad \text{con} \quad K_P = \frac{2\psi_{lc}\omega_{lc}v_0 - 1}{K_0} \quad \text{y} \quad K_I = \frac{v_0}{K_0}\omega_{lc}^2 \quad (6.1)$$

donde ψ_{lc} y ψ_{lc} son elegidos para obtener un polinomio característico a lazo cerrado dado por

$$A_{lc}(s) = \left(\frac{s}{\omega_{lc}}\right)^2 + 2\psi_{lc}\left(\frac{s}{\omega_{lc}}\right) + 1. \quad (6.2)$$

Demostración. Primero parametricemos $F_Q(s)$ como

$$F_Q(s) = \frac{\beta_1 s + 1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1},$$

donde, para asegurar que se satisfaga (6.2), elegimos

$$\alpha_2 = \frac{1}{\omega_{lc}^2}; \quad \alpha_1 = 2\frac{\psi_{lc}}{\omega_{lc}}$$

Entonces vemos que

$$S_0(s) = 1 - F_Q(s) = \frac{(\alpha_2 s + \alpha_1 - \beta_1)s}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1},$$

lleva a que el controlador sea

$$K(s) = \frac{T_0(s)}{S_0(s)} [G_0(s)]^{-1} = \frac{(\beta_1 s + 1)(v_0 s + 1)}{K_0 s (\alpha_2 s + \alpha_1 - \beta_1)}. \quad (6.3)$$

Así, para obtener un controlador PI que saque el polo a lazo abierto de $-v_0^{-1}$ de las perturbaciones de entrada, es suficiente que

$$F_Q(-a) = \frac{-a\beta_1 + 1}{a^2\alpha_2 - a\alpha_1 + 1} = 1.$$

Esto lleva a la elección

$$a = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2},$$

ó

$$\beta_1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{v_0} = \frac{2\psi_{lc}\omega_{lc}v_0 - 1}{v_0\omega_{lc}^2}.$$

Reemplazando en la ecuación del controlador (6.3), obtenemos

$$K(s) = \frac{F_Q(s)}{G_0(s)(1 - F_Q(s))} = \frac{\beta_1 v_0}{\alpha_2 K_0} + \frac{v_0}{\alpha_2 K_0} \frac{1}{s}.$$

□

El Lema 5, reduce el problema de diseño a la elección de un parámetro. Para ello, primero realizamos un escalamiento de tiempo con v_0 , lo que implica una frecuencia de escalamiento de un factor de $[v_0]^{-1}$. Si elegimos un factor de amortiguamiento de $\psi_{lc} = 0.7$ y utilizando (6.1) tenemos que

$$G_0(s)K(s) = \frac{s(1.4v - 1) + v^2}{s(s + 1)},$$

donde v es el valor normalizado para ω_{lc} y s ha sido también escalado por ω_{lc} . De la ecuación anterior es evidente que la elección de un parámetro (ω_{lc}) determina el desempeño del lazo. ω_{lc} es una medida del ancho de banda del lazo cerrado, en unidades del ancho de banda del modelo de la planta, así se convierte en un parámetro ajustable significativo.

6.3 Modelos con Integrador

En esta sección consideraremos un modelo de primer orden con integrador

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(v_0 s + 1)}. \quad (6.4)$$

Un integrador es un polo a lazo cerrado no deseado, además de inestable y por eso necesitamos aplicar la metodología explicada anteriormente (Sección 6).

Recordando del Lema 4 que la parametrización (3.1) sigue siendo válida, pero $Q(s)$ debe satisfacer restricciones adicionales de interpolación. En este caso solo hay dos restricciones, que son originadas por la presencia del polo en el origen. En particular, la estabilidad interna requiere que $Q(s)$ y $1 - Q(s)G_0(s)$ ambos tengan un cero en el origen.

Como el modelo no tiene ceros no deseados, podemos elegir

$$G_0^i(s) = \frac{s(v_0 s + 1)}{K_0},$$

que para que $Q(s)$ sea bipropia, $F_Q(s)$ debe tener al menos grado relativo 2. Con esta elección $Q(s) = F_Q(s)G_0'(s)$, satisface uno de las restricciones, $Q(0) = 0$. La segunda restricción se satisface si $F_Q(s)$ es tal que $F_Q(0) = 1$. Una elección válida para $F_Q(s)$ es

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1},$$

que lleva a

$$K(s) = \frac{F_Q(s)[G_0(s)]^{-1}}{1 - F_Q(s)} = \frac{s(v_0 s + 1)}{K_0 s(\alpha_2 s + \alpha_1)}. \quad (6.5)$$

El controlador (6.5), es obtenido después de una cancelación inestable polo-cero. Esta cancelación debe ser llevada a cabo analíticamente, es decir, antes de la implementación. Desde el punto de vista del diseño, el controlador anterior tiene el defecto que no rechaza perturbaciones constantes de entrada. Esto ocurre debido a que $S_{i0}(s)$ no tiene un cero en el origen aunque $S_0(s)$ sí. Esto es remediado si, eligiendo $F_Q(s)$, la función de sensibilidad $S_0(s)$ es forzada a tener dos polos en el origen, luego $S_{i0}(s)$ tendrá un cero en el origen. La elección más simple para $F_Q(s)$ para obtener dicho resultado es

$$F_Q(s) = \frac{F_N(s)}{F_D(s)} = \frac{\alpha_1 s + 1}{\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} \quad (6.6)$$

Observemos que los coeficientes de numerador coinciden con los del denominador de la misma potencia de s . La función de sensibilidad resultante es

$$S_0(s) = 1 - F_Q(s) = \frac{s^2(\alpha_3 s + \alpha_2)}{\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1},$$

y la sensibilidad de entrada resulta

$$S_{i0}(s) = S_0(s)G_0(s) = \frac{K_0 s(\alpha_3 s + \alpha_2)}{(\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1)(v_0 s + 1)}.$$

Ahora las perturbaciones constantes de entrada serán rechazadas con error nulo en régimen permanente. El controlador asociado de realimentación unitaria está dado por

$$K(s) = \frac{(v_0 \alpha_1) s^2 + (v_0 + \alpha_1) s + 1}{K_0 s(\alpha_3 s + \alpha_2)},$$

que es una vez más un controlador PID con

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{(v_0 + \alpha_1)\alpha_2 - \alpha_3}{K_0 \alpha_2^2}, \\ K_I &= \frac{1}{K_0 \alpha_2}, \\ K_D &= \frac{\alpha_2^2 \alpha_1 v_0 - \alpha_3 \alpha_2 v_0 - \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3^2}{K_0 \alpha_2^2}, \\ \tau_D &= \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Como en los casos anteriores, los parámetros del PID están dados explícitamente en términos de los parámetros del modelo con integrador (6.4) y el diseño del filtro (6.6). El filtro es diseñado primero seleccionando el polinomio característico a lazo cerrado $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1$, al que luego se incluye el cero $\alpha_1 s + 1$. Un polinomio característico de tercer orden puede ser obtenido combinando un par de polos complejos conjugados y un polo real, es decir que podemos escribir

$$F_D(s) = \left(\frac{1}{\omega_{lc}^2} s^2 + \frac{2\psi_{lc}}{\omega_{lc}} s + 1 \right) (\alpha_c s + 1),$$

llevando a

$$F_N(s) = \left(\frac{2\psi_{lc} + \alpha_c \omega_{lc}}{\omega_{lc}} s + 1 \right).$$

En general el polo simple real está ubicado a la misma distancia del origen que el par complejo, esto es

$$\alpha_c = \frac{1}{\omega_{lc}},$$

y el factor de amortiguamiento es elegido como $\psi_{lc} = 0.7$; así el filtro de tercer orden, y el controlador PID, están parametrizados en términos de un simple parámetro ajustable convenientemente ω_{lc} .

Normalmente, si el sistema real iguala al modelo, la función de sensibilidad complementaria está dada por $F_Q(s)$. Se puede ver que hay un cero en

$$z_0 = -\frac{\omega_{lc}}{2\psi_{lc} + 1}.$$

El polinomio característico a lazo cerrado induce un cero que es más lento (pequeño) cuanto más pequeño es ω_{lc} ; y ceros lentos producen sobrevalor grande. Observar que el sobrevalor producido por el cero de $F_Q(s)$ fue inducido por el deseo de que el error en régimen permanente sea cero en respuesta a una perturbación escalón a la entrada de un sistema integrador.

7 Parametrización Afín. Caso Inestable

En la última sección encontramos que necesitábamos restricciones de interpolación extras sobre $Q(s)$ para eliminar polos no deseados de la función de sensibilidad $S_{i0}(s)$. Encontramos que era una tarea tediosa, por lo que ahora nos preguntamos si es posible reparametrizar $K(s)$ de manera tal que los requisitos dados en el lema 4 se cumplan automáticamente. La respuesta es sí y el resultado está descrito en el siguiente lema.

Lema 6 (Parametrización afín polos a lazo abierto no deseados). Consideremos un lazo de control de un grado de libertad para una planta con un modelo nominal $G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)}$. Supongamos que $B_0(s)$ y $A_0(s)$ son polinomios coprimos y que $G_0(s)$ puede tener polos no deseados (incluyendo polos inestables).

Entonces el lazo cerrado nominal será internamente estable y todas las funciones de sensibilidad tendrán solo polos deseados si y solo si $K(s)$ es parametrizada por

$$K(s) = \frac{\frac{P(s)}{E(s)} + Q_u(s) \frac{A_0(s)}{E(s)}}{\frac{L(s)}{E(s)} - G_u(s) \frac{B_0(s)}{E(s)}}, \quad (7.1)$$

donde

- (a) $Q_u(s)$ es una función de transferencia propia y estable con polo deseados.
- (b) $P(s)$ y $L(s)$ son polinomios que satisfacen la siguiente ecuación de asignación de polos

$$A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = E(s)F(s), \quad (7.2)$$

donde $E(s)$ y $F(s)$ son polinomios de grado apropiado que tienen ceros en la región deseada del plano complejo, pero son arbitrarios.

Demostración. Por simplicidad, supongamos que todos los polos en $A_0(s)$ son no deseados (ver Nota 6 para el caso más general cuando existe una mezcla de polos). Sin perder generalidad podemos escribir $Q(s)$ como cociente de dos polinomios

$$Q(s) = \frac{\tilde{P}(s)}{\tilde{E}(s)}, \quad (7.3)$$

dando

$$K(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_0(s)} = \frac{\tilde{P}(s)A_0(s)}{\tilde{E}(s) - \tilde{P}(s)B_0(s)}. \quad (7.4)$$

De la ecuación (7.3) vemos que las condiciones necesarias y suficientes para que las restricciones de interpolación del Lema 5 puedan ser satisfechas son

- (i) Los ceros de $\tilde{E}(s)$ están en la zona deseada,
- (ii) $A_0(s)$ es un factor de $\tilde{P}(s)$, es decir, existe $\bar{P}(s)$ tal que $\tilde{P}(s) = A_0(s)\bar{P}(s)$, y
- (iii) $A_0(s)$ es un factor de $[1 - Q(s)G(s)]$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 - Q(s)G(s) &= 1 - \frac{\tilde{P}(s)B_0(s)}{\tilde{E}(s)A_0(s)} = 1 - \frac{\bar{P}(s)B_0(s)}{\tilde{E}(s)} \\ &= \frac{\tilde{E}(s) - \bar{P}(s)B_0(s)}{\tilde{E}(s)}. \end{aligned}$$

Así, para satisfacer (iii), deberá existir un polinomio $\bar{L}(s)$ tal que

$$\tilde{E}(s) - \bar{P}(s)B_0(s) = \bar{L}(s)A_0(s),$$

o

$$\bar{L}(s)A_0(s) + \bar{P}(s)B_0(s) = E(s)F(s), \quad (7.5)$$

donde $\tilde{E}(s) = E(s)F(s)$.

La ecuación (7.5) la reconocemos como una ecuación estándar de asignación de polos. Por eso, eligiendo el orden de $E(s), F(s), \bar{L}(s), \bar{P}(s)$ [demostrado en las transparencias de la Clase 9: *Diseño Básico de Controladores SISO*], podemos encontrar una única solución $L(s), P(s)$.

Dada una solución $(L(s), P(s))$ de (7.5), es un resultado estándar de álgebra que cualquier otra solución $(\bar{L}(s), \bar{P}(s))$ puede ser expresada como

$$\frac{\bar{L}(s)}{E(s)} = \frac{L(s)}{E(s)} - Q_u(s) \frac{B_0(s)}{E(s)} \quad (7.6)$$

$$\frac{\bar{P}(s)}{E(s)} = \frac{P(s)}{E(s)} + Q_u(s) \frac{A_0(s)}{E(s)}, \quad (7.7)$$

donde $Q_u(s)$ es una función de transferencia propia estable sin polos no deseados (la solución satisface (7.5)).

Sustituyendo (7.5) en (7.4) tenemos

$$K(s) = \frac{\bar{P}(s)}{\bar{L}(s)}. \quad (7.8)$$

Finalmente usando (7.6), (7.7) y (7.8), vemos que cualquier controlador que satisface las condiciones deseadas puede ser parametrizado como en (7.1), (7.2). \square

Nota 4. La ecuación (7.2) vincula el método de parametrización afín con el de asignación de polos.

Nota 5. El Lema 6 da una forma automática de parametrizar $Q(s)$ de forma tal que las restricciones de interpolación dados en el Lema 5 son satisfechos automáticamente. De hecho, sustituyendo (7.5), (7.6), (7.7) en (7.3) encontramos que

$$Q(s) = \frac{A_0(s)}{F(s)} \left[\frac{P(s)}{E(s)} + Q_u(s) \frac{A_0(s)}{E(s)} \right],$$

donde $Q_u(s)$ tiene polos deseados. Se verifica entonces que la forma para $Q(s)$ automáticamente asegura que las restricciones de interpolación (i) a (iii) del Lema 6 se cumplen.

Nota 6. Si $A_0(s)$ posee polos deseados y no deseados, podemos escribir

$$A_0(s) = A_d(s)A_n(s),$$

donde $A_n(s)$ contiene polos no deseados. En este caso podemos escribir $E(s) = A_d(s)\bar{E}(s)$ y (7.2) se convierte en

$$A_d(s)A_n(s)L(s) + B_0(s)P(s) = A_d(s)\bar{E}(s)F(s).$$

Esta ecuación requiere la existencia de un $\tilde{P}(s)$ tal que $P(s) = \tilde{P}(s)A_d(s)$ y así (7.2) se reduce a

$$A_n(s)L(s) + B_0(s)\tilde{P}(s) = \bar{E}(s)F(s). \quad (7.9)$$

Cuando $A_0(s)$ posee solo polos deseados, $A_0(s) = E(s)$, $A_n(s) = 1$, $\bar{E}(s) = 1$ y podemos tomar $L(s) = F(s)$; $\tilde{P}(s) = 0$.

El resultado en el Lema 6 se reduce al dado en el Lema 1. Por supuesto, tenemos que

$$Q(s) = Q_u(s).$$

Ilustraremos la aplicamos del Lema 6 en el siguiente ejemplo

Ejemplo 4. Considerar el modelo de una planta nominal

$$G_0(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s+4)} \quad (7.10)$$

Supongamos que todos los polos a lazo cerrado yacen a izquierda de -0.5 en el plano complejo. También requerimos que el controlador incluya acción integral.

1. Encontrar un controlador particular que satisfaga estas condiciones.
2. Parametrizar todos los controladores que satisfagan esta condición.

Solución.

1. Vemos que el polo a lazo abierto en -4 se encuentra en la región deseada. Como se pide que el controlador tenga acción integral, $\bar{L}(s)$ en (7.8) deberá ser de la forma $s\tilde{L}(s)$.

Entonces la ecuación (7.9) se convierte en

$$s(s-1)\tilde{L}(s) + (s-4)\tilde{P}(s) = \bar{E}(s)F(s).$$

Para una única solución, elegimos los grados de $\bar{E}(s)F(s)$, $\tilde{L}(s)$ y $\tilde{P}(s)$ como 3, 1 y 1 respectivamente. Para ser específico elegimos

$$\bar{E}(s)F(s) = (s^2 + 4s + 9)(s + 10).$$

Encontramos que

$$\tilde{L}(s) = s + \frac{263}{6}; \quad \tilde{P}(s) = -\frac{1}{6}(173s + 135).$$

Así una solución particular es

$$K(s) = -\frac{(173s + 135)(s + 4)}{s(6s + 263)}.$$

2. Todas las posibles soluciones pueden ser expresadas como en (7.1) y luego de algunas simplificaciones, tenemos

$$K(s) = \frac{\left[-\frac{173s + 135}{6(s^2 + 5s + 9)} \right] + Q_u(s) \left[\frac{(s - 1)}{(s^2 + 4s + 9)} \right]}{\left[\frac{s(6s + 263)}{6(s^2 + 4s + 9)(s + 4)} \right] - Q_u(s) \left[\frac{(s - 4)}{(s^2 + 4s + 9)(s + 4)} \right]}, \tag{7.11}$$

donde $Q_u(s)$ es cualquier función de transferencia propia con los polos en la región deseada.

La parametrización (7.1) lleva a las funciones de sensibilidad nominales a las siguientes versiones parametrizadas:

$$S_0(s) = \frac{A_0(s)L(s)}{E(s)F(s)} - Q_u(s) \frac{B_0(s)A_0(s)}{E(s)F(s)}, \tag{7.12}$$

$$T_0(s) = \frac{B_0(s)P(s)}{E(s)F(s)} + Q_u(s) \frac{B_0(s)A_0(s)}{E(s)F(s)}, \tag{7.13}$$

$$S_{i0}(s) = \frac{B_0(s)L(s)}{E(s)F(s)} - Q_u(s) \frac{[B_0(s)]^2}{E(s)F(s)}, \tag{7.14}$$

$$S_{u0}(s) = \frac{A_0(s)P(s)}{E(s)F(s)} + Q_u(s) \frac{[A_0(s)]^2}{E(s)F(s)}. \tag{7.15}$$

$$\tag{7.16}$$

La parametrización del controlador desarrollada anteriormente puede ser descrita también en la forma de diagrama de bloques. La ecuación de $K(s)$ implica directamente que el controlador es como en la Figura 5

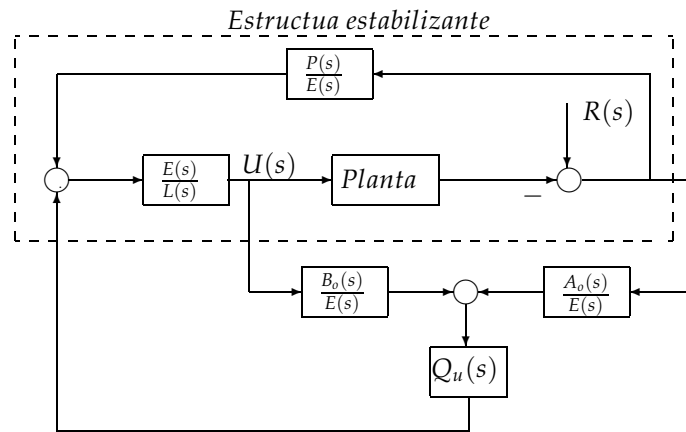


Figura 5: Parametrización de Q para plantas inestables

Observamos que, por superposición, la señal de entrada $U(s)$ en la Figura 5 puede ser escrita como la suma de dos señales, una proveniente del lazo superior vía $\frac{P(s)}{L(s)}$ y la otra vía $Q_u(s)$.

Entonces la entrada $U(s)$ en la Figura 5 está dada por

$$\frac{L(s)}{E(s)}U(s) = -\frac{P(s)}{E(s)}Y(s) + Q_u(s) \left[\frac{B_0(s)}{E(s)}U(s) - \frac{A_0(s)}{E(s)}Y(s) \right].$$

Es interesante también examinar la clase de todos los controladores estabilizantes para una planta pre-estabilizada. Consideremos la configuración de la figura 6, notemos que la función transferencia a lazo cerrado de planta pre-estabilizada es $\frac{B_0(s)}{F(s)}$, donde $A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = E(s)F(s)$. Así, la Figura 6 corresponde a la Figura 1, donde $G_0(s)$ fue reemplazada por la planta pre-estabilizada.

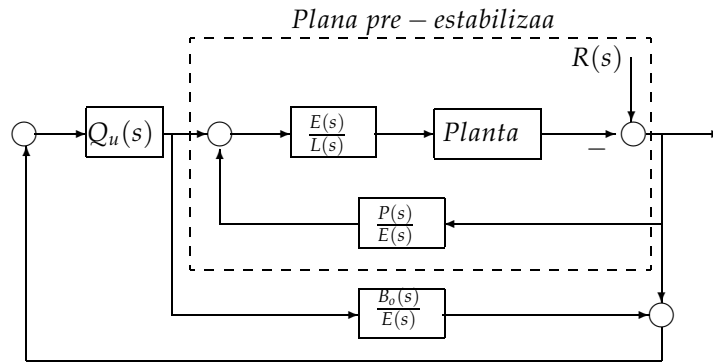


Figura 6: Interpretación de Q para una planta pre-estabilizada.

Un simple cálculo muestra que el controlador de realimentación unitaria equivalente en la Figura 6 es

$$\bar{K}(s) = \frac{Q_x(s)E(s)F(s) + P(s) [F(s) - Q_x(s)B_0(s)]}{L(s) [F(s) - Q_x(s)B_0(s)]}$$

Utilizando la expresión $A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = E(s)F(s)$, la expresión anterior puede ser simplificada, quedando

$$\bar{K}(s) = \frac{Q_x(s)A_0(s)L(s) + P(s)F(s)}{L(s) [F(s) - Q_x(s)B_0(s)]}$$

Lema 7. Consideremos las estructuras de control de las Figuras 5 y 6.

- (i) Si $Q_x(s)$ es estable, entonces la Figura 6 siempre puede ser redibujada como la Figura 5, donde $Q_u(s)$ toma el valor particular

$$Q_u(s) = \frac{Q_x(s)L(s)}{F(s)} \tag{7.17}$$

- (ii) Si $\frac{Q_u(s)}{L(s)}$ es estable, entonces la Figura 5 puede ser redibujada como la Figura 6 donde $Q_x(s)$ toma el valor particular

$$Q_x(s) = \frac{F(s)Q_u(s)}{L(s)}$$

Demostración. Igualando $\bar{K}(s)$ a $K(s)$ encontramos que la relación entre $Q_u(s)$ y $Q_x(s)$ es la dada por (7.17). □

Nota 7. La parte (i) del resultado anterior no es sorprendente, dado que el lazo en la Figura 6 es claramente estable para $Q_x(s)$ estable, y así, por el Lema 6 el controlador puede ser expresado como en la Figura 5 para algún $Q_u(s)$ estable. La conversión dada en la parte (ii) es más interesante ya que muestra que existen estructuras del tipo que se muestran en la Figura 5 que no pueden ser expresadas como en la Figura 6. Sin embargo, si observamos la ecuación (7.12) indica que se alcanza baja sensibilidad si $Q_u(s)$ es elegido cercano a $\frac{L(s)}{B_0(s)}$ sobre la banda de frecuencia de interés. Así, sería razonable elegir $Q_u(s)$ tal que $\frac{Q_u(s)}{L(s)}$ sea estable. En este caso, la parte (ii) del Lema 7 muestra que es posible pre-estabilizar la planta y después utilizar la representación simple del Lema 1.

Referencias

[1] Stefan F. Graebe and Mario E. Salgado Graham C. Goodwin. *Control System Design*. Valparaíso, 2000.