

# Capítulo 7

## Especificaciones y Limitaciones de Diseño

El objetivo de este capítulo es presentar conceptos generales (no solamente conectados con el enfoque en variable de estados) relativos al desempeño del sistema de control, es decir, al comportamiento deseado del sistema más allá de los requerimientos básicos de estabilidad. Este desempeño generalmente se refiere a la forma en que el sistema responde a ciertas señales en el lazo de control, por ejemplo:

- respuesta rápida y con una ganancia determinada a las señales de referencia (escalones, rampas, sinusoides de baja frecuencia),
- rechazo, o respuesta despreciable, a señales espúreas (perturbaciones de entrada, ruido de medición).

El desempeño especificado para un sistema, cuando el sistema se representa mediante un modelo matemático, se llama *nominal*. En la realidad, en general, el desempeño del sistema real diferirá del nominal, ya que es imposible obtener un modelo matemático que describa con absoluta precisión al sistema físico real. Cuando el controlador diseñado para el sistema nominal conserva su desempeño sobre el sistema real, se dice que es *robusto*. Desempeño y robustez son las características principales en un sistema de control.

En este capítulo introducimos las *funciones de sensibilidad*, que permiten cuantificar en forma precisa el desempeño y la robustez de sistemas de control. Como aplicación, veremos cómo cuantificar limitaciones fundamentales en la respuesta temporal al escalón de un sistema de control simple.

Como referencias generales a los temas de este capítulo pueden consultarse Goodwin et al. [2000, §5] para las definiciones de funciones de sensibilidad y arquitecturas de realimentación, Doyle et al. [1992] y Sánchez Peña [1992] para los resultados relativos a robustez, y Seron et al. [1997, §1] para los resultados relativos a limitaciones en la respuesta al escalón.

### 7.1. Sensibilidad y Robustez

Uno de los esquemas de control más simples es el lazo en realimentación de la Figura 7.1.

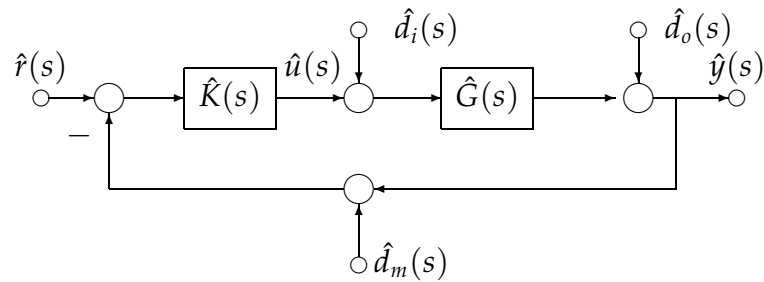


Figura 7.1: Lazo de control de un grado de libertad.

En el lazo de la Figura 7.1 las señales representan

$\hat{y}(s)$ : salida	$\hat{r}(s)$ : referencia
$\hat{u}(s)$ : control	$\hat{d}_i(s)$ : perturbación de entrada
$\hat{d}_o(s)$ : perturbación de salida	$\hat{d}_m(s)$ : perturbación de medición

La implementación práctica de un sistema de control se ve afectada en su desempeño de dos principales fuentes de error:

1. señales espúreas (perturbaciones) en el lazo de control,
2. incertidumbre en el modelo de la planta  $\hat{G}(s)$ .

Un buen diseño de control debe tolerar satisfactoriamente tanto perturbaciones como incertidumbres en el modelado. La especificación de las propiedades del sistema de control con respecto a rechazo de perturbaciones e incertidumbre definen los objetivos de *desempeño* (en inglés: performance) del diseño.

### 7.1.1. Perturbaciones

Las señales espúreas representan perturbaciones que bajo condiciones ideales deberían ser nulas, pero que están presentes, en mayor o menor medida en todo sistema real.

**Ejemplo 7.1.** El control de corriente de armadura de un motor de corriente continua se suele implementar mediante inversores que trabajan por modulación de ancho de pulso (PWM: pulse width modulation),  $i(t)$ . La componente continua de la señal,  $i_0(t)$ , es el control efectivo; las armónicas representan una perturbación de entrada  $d_i(t)$ ,  $i(t) = i_0(t) + d_i(t)$  (Figura 7.2).

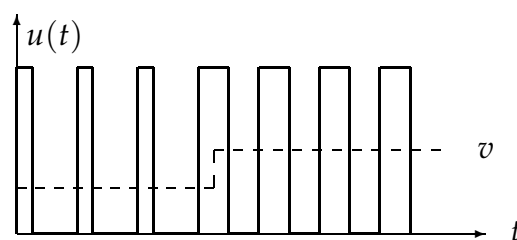


Figura 7.2: Actuador PWM

**Definición 7.1 (Sensibilidad).** Cuando un sistema de control retiene su desempeño nominal frente a perturbaciones se dice que tiene *buenas propiedades de rechazo*, o *baja sensibilidad*, a perturbaciones.

### 7.1.2. Incertidumbre

La incertidumbre en el modelado surge de que es imposible conocer con exactitud el modelo de un sistema. Así, el modelo con el que se diseña el controlador (nominal) es una aproximación al verdadero sistema sobre el cual este actuará. Por ejemplo, si diseñamos un controlador basados en el modelo linealizado alrededor de un punto de operación nominal de un sistema no lineal, las alinealidades se presentarán como incertidumbres de modelado.

**Ejemplo 7.2.** Sea el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + x^3(t) + u(t) \\ &= (1 + x^2(t))x(t) + u(t).\end{aligned}$$

El modelo linealizado alrededor del origen es  $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$ , y así el control  $u(t) = -2x(t)$  estabiliza asintóticamente el sistema linealizado. Sin embargo, este control aplicado al sistema real da el lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + x^3(t) \\ &= -(1 - x^2(t))x(t).\end{aligned}$$

que sólo alcanza estabilidad asintótica para un conjunto acotado de condiciones iniciales:  $\{x : |x| < 1\}$ .

Para tener en cuenta la incertidumbre del modelo en el diseño del controlador es necesario contar con una representación de la incertidumbre con alguna cota conocida. Por ejemplo, es habitual representar la incertidumbre con un modelo lineal *multiplicativo* (Figura)

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s) (I + \Delta(s)), \quad (7.1)$$

donde  $\hat{G}(s)$  representa la función transferencia real,  $\hat{G}_0(s)$  la función transferencia nominal (el modelo utilizado para diseño), y  $\Delta(s)$  una función transferencia desconocida salvo por alguna cota del tipo  $\|\Delta(j\omega)\| \leq \alpha(\omega)$ , con  $\alpha(\omega)$  conocida.

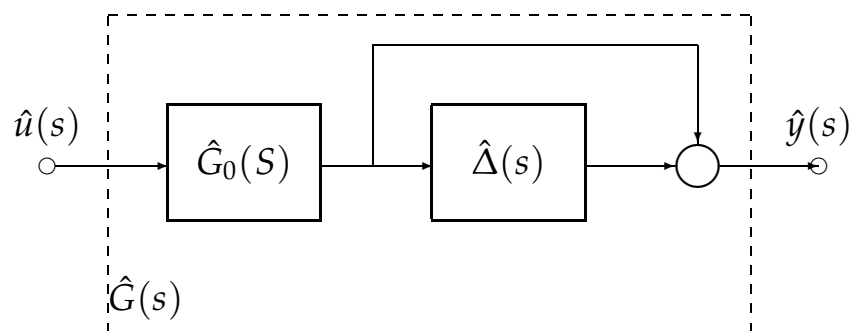


Figura 7.3: Incertidumbre multiplicativa

**Ejemplo 7.3.** Supongamos que tenemos el sistema

$$\hat{G}(s) = \frac{K}{\tau s + 1},$$

donde existe incertidumbre en la posición del polo,  $\tau = \tau_0 + \delta\tau$ , donde  $\tau_0$  es el valor nominal. La representación de esta incertidumbre en el modelo multiplicativo (7.1) es

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= \frac{K}{(\tau_0 + \delta\tau)s + 1} \\ &= \frac{K}{\tau_0 s + 1} \left( \frac{\tau_0 s + 1}{\tau_0 s + \delta\tau s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{\tau_0 s + 1} \left( 1 - \frac{\delta\tau s}{\tau_0 s + \delta\tau s + 1} \right) \\ &= \hat{G}_0(s)(1 + \Delta(s)). \end{aligned}$$

**Definición 7.2 (Robustez).** Un sistema de control que retiene sus propiedades de estabilidad y desempeño frente a incertidumbres de modelo en la planta se dice *robusto*.

No siempre es posible alcanzar buen rechazo de perturbaciones conjuntamente con robustez, y así deben adoptarse *soluciones de compromiso* en el diseño. Para alcanzar soluciones de compromiso adecuadas a las condiciones de perturbaciones e incertidumbre existentes en el sistema considerado, es útil disponer de indicadores que de alguna forma “midan” las propiedades de sensibilidad y robustez de un controlador dado. Dos indicadores tradicionalmente utilizados son las *funciones de sensibilidad del lazo*.

## 7.2. Funciones de Sensibilidad

### 7.2.1. Funciones de transferencia en lazo cerrado

Volvamos al sistema de control de la Figura 7.1, que supondremos SISO por simplicidad. La respuesta del sistema a condiciones iniciales nulas está dada por

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \hat{G}(s)\hat{u}(s) + \hat{d}_o(s) + \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \\ \hat{u}(s) &= \hat{K}(s)\hat{r}(s) - \hat{K}(s)\hat{y}(s) - \hat{K}(s)\hat{d}_m(s), \\ &= \hat{K}(s) \left[ \hat{r}(s) - \hat{d}_m(s) - \hat{G}(s)\hat{u}(s) - \hat{d}_o(s) - \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \right], \end{aligned}$$

de donde resolvemos

$$\begin{aligned} \hat{u}(s) &= \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \left[ \hat{r}(s) - \hat{d}_m(s) - \hat{d}_o(s) - \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \right] \\ \hat{y}(s) &= \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \left[ \hat{G}(s)\hat{K}(s) \left( \hat{r}(s) - \hat{d}_m(s) \right) + \hat{d}_o(s) + \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \right]. \end{aligned}$$

La arquitectura del esquema de la Figura 7.1 se llama “de un grado de libertad”. Este nombre refleja el hecho de que sólo existe un grado de libertad para definir las funciones transferencias de lazo cerrado que mapean  $\hat{r}(s)$  y  $\hat{d}_m(s)$  a  $\hat{y}(s)$ , y  $\hat{d}_i(s)$  y  $\hat{d}_o(s)$  a  $\hat{y}(s)$ .

Así, si  $\hat{K}(s)$  se diseña para obtener una particular respuesta a la señal de referencia,

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)},$$

se induce al mismo tiempo una única respuesta a la perturbación de salida,

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}_o(s)} = \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}.$$

A menudo, es deseable ajustar las respuestas a referencia y perturbaciones en forma independiente. Esto puede lograrse con una arquitectura de *dos grados de libertad*, como la de la Figura 7.4. La salida en este caso esta dada por

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)\hat{H}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{r}(s) + \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_o(s) + \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_i(s) - \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_m(s).$$

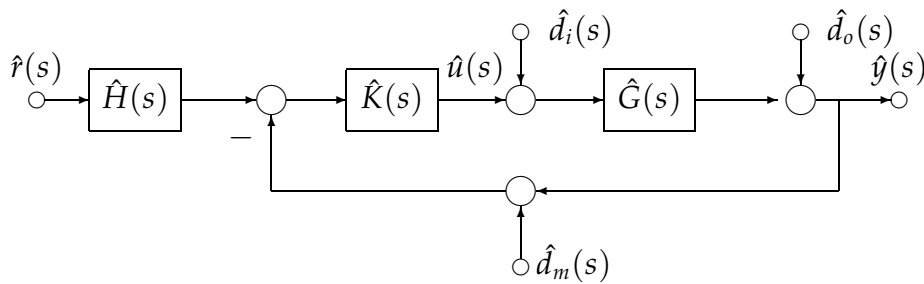


Figura 7.4: Lazo de control de dos grados de libertad.

Ahora  $\hat{K}(s)$  puede usarse para ajustar la respuesta a la perturbación (que tiene la misma transferencia que en la arquitectura de un grado de libertad), y  $\hat{H}(s)$  puede usarse para ajustar la respuesta a la referencia independientemente, dada por

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)\hat{H}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}.$$

No obstante, notar que aún en la arquitectura de dos grados de libertad quedan funciones transferencias cuya dinámica no puede ajustarse independientemente; el controlador  $\hat{K}(s)$  puede usarse para ajustar la respuesta a *una* perturbación  $\hat{d}_i(s)$ ,  $\hat{d}_o(s)$  o  $\hat{d}_m(s)$ , pero una vez elegido, las restantes respuestas quedan determinadas.

La salida del controlador en el esquema de la Figura 7.4 está dada por

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{K}(s)\hat{H}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{r}(s) - \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_o(s) - \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_i(s) - \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_m(s).$$

La respuesta a lazo cerrado del sistema de la Figura 7.4 está entonces gobernada por cuatro funciones transferencia, colectivamente llamadas *funciones de sensibilidad*,

$$\hat{T}(s) \triangleq \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad \hat{S}(s) \triangleq \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad (7.2)$$

$$\hat{S}_i(s) \triangleq \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad \hat{S}_u(s) \triangleq \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad (7.3)$$

e individualmente

$\hat{T}(s)$  : Sensibilidad complementaria

$\hat{S}(s)$  : Sensibilidad

$\hat{S}_i(s)$  : Sensibilidad de entrada

$\hat{S}_u(s)$  : Sensibilidad de control

Las funciones de sensibilidad están algebraicamente relacionadas, y estas relaciones son unas de las manifestaciones de las restricciones inherentes al lazo de control en realimentación. No es difícil ver que

$$\begin{aligned}\hat{S}(s) + \hat{T}(s) &= 1 \\ \hat{S}_i(s) &= \hat{S}(s)\hat{G}(s) = \frac{\hat{T}(s)}{\hat{K}(s)} \\ \hat{S}_u(s) &= \hat{S}(s)\hat{K}(s) = \frac{\hat{T}(s)}{\hat{G}(s)}.\end{aligned}$$

## 7.2.2. Especificaciones de la Respuesta en Frecuencia

En resumen, las funciones de sensibilidad permiten definir la respuesta *en régimen permanente* del sistema a las señales más típicas en el lazo de control. Así, podemos especificar la respuesta del sistema especificando ganancia, ceros y polos de  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$ .

Claramente, como el requerimiento básico para la existencia de respuesta en régimen permanente es la estabilidad BIBO, tenemos que la primera especificación para  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$  es que deben tener todos sus polos con parte real negativa.

La distribución de ceros y polos de  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$  puede asignarse de forma de satisfacer otros requerimientos de desempeño. Por ejemplo, como normalmente la señal de referencia  $\hat{r}(j\omega)$  posee un espectro de bajas frecuencias,  $\hat{T}(j\omega)$  se especifica como filtro pasa-bajos, y así rechazar al mismo tiempo el ruido de medición, normalmente de alta frecuencia.

La Figura 7.5 muestra especificaciones típicas de la respuesta en frecuencia para  $\hat{T}(j\omega)$  y  $\hat{S}(j\omega)$  (recordemos que  $\hat{T}(s)$  y  $\hat{S}(s)$  no pueden elegirse en forma independiente ya que  $\hat{T}(s) + \hat{S}(s) = 1 \forall s \in \mathbb{C}$ ). Es decir,

$$\begin{aligned}|\hat{S}(j\omega)| &\ll 1, & \forall \omega \in [0, \omega_1], \\ |\hat{T}(j\omega)| &\ll 1, & \forall \omega \in [\omega_2, \infty),\end{aligned}$$

para un ciertos  $\omega_1, \omega_2$  tales que  $\omega_2 > \omega_1$ .

## 7.3. Robustez

### 7.3.1. Estabilidad Robusta

Además de especificar la respuesta del sistema a señales, las funciones  $\hat{T}(j\omega)$  y  $\hat{S}(j\omega)$  sirven para especificar las propiedades de robustez del sistema.

Supongamos que representamos la incertidumbre en el modelo  $\Delta(s)$  con estructura multiplicativa

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s)(1 + \hat{\Delta}(s)), \quad (7.4)$$

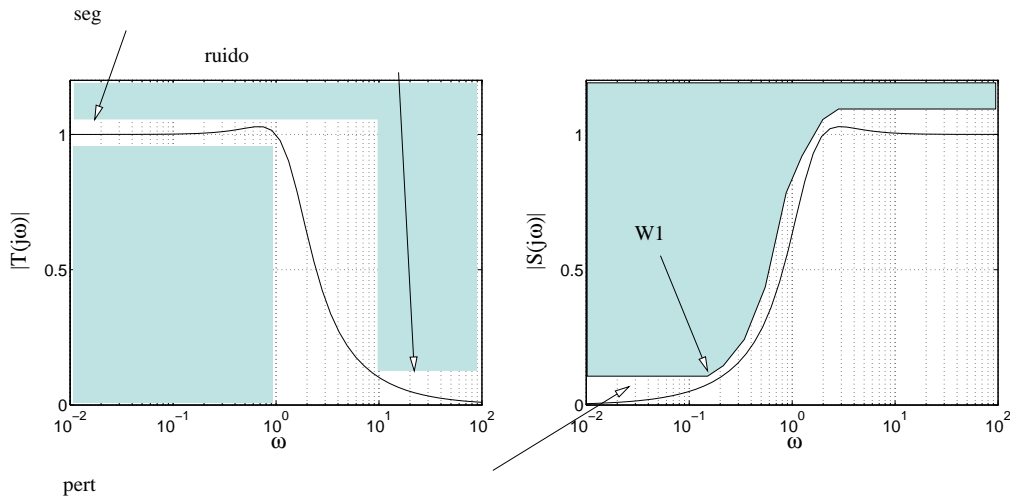


Figura 7.5: Formas típicas para  $|\hat{T}(j\omega)|$  and  $|\hat{S}(j\omega)|$ .

y que se conoce la cota de incertidumbre

$$|\hat{\Delta}(j\omega)| \leq W_2(\omega). \tag{7.5}$$

Típicamente,  $W_2(\omega)$  es una función creciente de la frecuencia  $\omega$  (el modelo es más incierto a frecuencias mayores). ¿Cómo se obtiene la cota  $W_2(\omega)$  en la práctica? El siguiente ejemplo ilustra una forma.

**Ejemplo 7.4 (Incertidumbre de modelado).** Supongamos que la planta es estable y se obtuvo su función transferencia nominal  $\hat{G}_0(s)$  mediante experimentos de respuesta en frecuencia: La magnitud y fase de la salida se miden para  $m$  sinusoides de referencia de distintas frecuencias  $\omega_i, i = 1, \dots, m$ . El experimento se repitió  $n$  veces.

Denotamos el par (magnitud, fase) para la frecuencia  $\omega_i$  y el experimento  $k$  como  $(M_{ik}, \phi_{ik})$ . El modelo nominal se puede obtener ajustando  $\hat{G}_0(j\omega)$  a estas mediciones, por ejemplo, minimizando el error cuadrático medio total (típico en *Identificación de Sistemas*).

Una vez obtenida la función transferencia nominal  $\hat{G}_0(s)$ , se puede obtener  $W_2(\omega)$  eligiéndola de forma tal que

$$\left| \frac{M_{ik}e^{j\phi_{ik}}}{\hat{G}_0(j\omega_i)} - 1 \right| \leq W_2(\omega), \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n.$$

Existen distintos criterios para ajustar  $W_2(\omega)$ . La Figura 7.6 muestra los resultados de un experimento real en un sistema intercambiador de calor experimental ( $n = 3$ ).

El siguiente es un importante resultado que da condiciones necesarias y suficientes para estabilidad robusta con incertidumbre multiplicativa en los lazos de control de la Figura 7.1, 7.4.

**Teorema 7.1 (Estabilidad robusta con incertidumbre multiplicativa).** Sea la planta nominal  $\hat{G}_0(s)$  con incertidumbre de modelo  $\hat{\Delta}(s)$  estable y dada por (7.4) y (7.5). Entonces, si los lazos de control de la Figura 7.1, 7.4 son estables con la planta nominal  $\hat{G}_0(s)$ , serán estables con la planta real  $\hat{G}(s)$  si y sólo si

$$|\hat{T}_0(j\omega)| < \frac{1}{W_2(\omega)} \Leftrightarrow |W_2(\omega)\hat{T}(j\omega)| < 1, \quad \text{para todo } \omega, \tag{7.6}$$

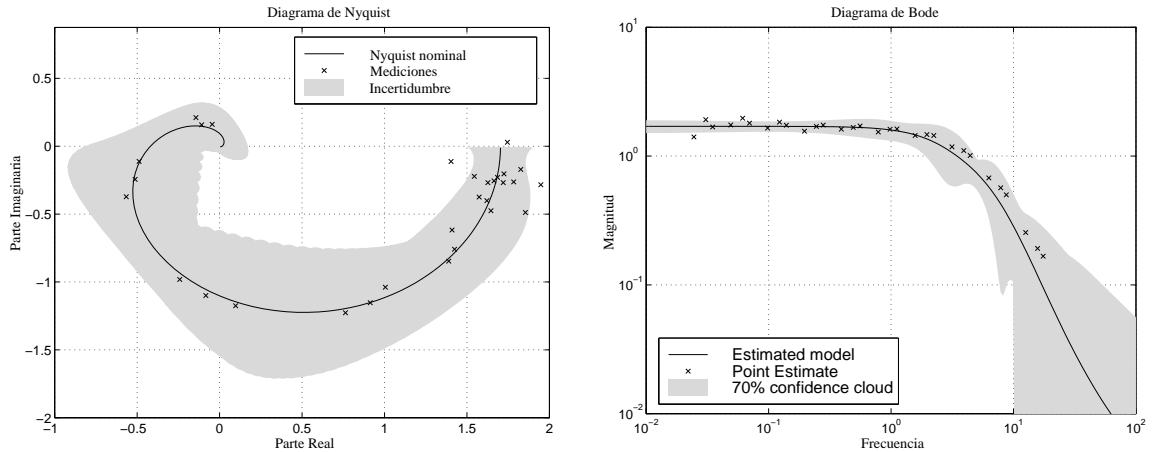


Figura 7.6: Mediciones, modelo nominal e incertidumbre

donde  $\hat{T}_0(j\omega)$  es la sensibilidad complementaria nominal (de (7.2) con  $\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s)$ ).

*Demostración.* Ver por ejemplo Sánchez Peña [1992, §2] o Doyle et al. [1992, §4]. □

Este resultado nos dice que si existe mucha incertidumbre de modelo a una determinada frecuencia,  $\hat{T}_0(s)$  debe diseñarse (a través de  $\hat{K}(s)$ ) para tener valores bajos a esa frecuencia, o la estabilidad nominal del sistema puede llegar a perderse en la planta real. La condición de estabilidad robusta (7.6) tiene la siguiente interpretación gráfica: Puesto que

$$|\hat{T}(j\omega)| < \frac{1}{W_2(\omega)} \Leftrightarrow \left| \frac{W_2(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)}{1 + \hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |W_2(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)| < |1 + \hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)|, \quad \forall \omega,$$

entonces, para cada frecuencia  $\omega$  el punto crítico  $-1$  se encuentra fuera del disco de centro  $\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)$  y radio  $|W_2(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)|$ .

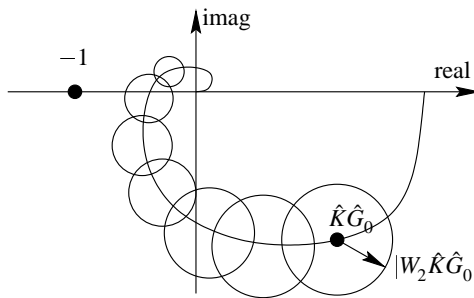


Figura 7.7: Estabilidad robusta gráficamente



### 7.3.2. Desempeño robusto

El desempeño *nominal* del sistema puede especificarse definiendo la forma de  $|\hat{S}(j\omega)|$  con una función de peso dada  $W_1(\omega)$  requiriendo que

$$|\hat{S}(j\omega)| < \frac{1}{W_1(\omega)} \Leftrightarrow |W_1(\omega)\hat{S}(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega. \quad (7.7)$$

Si (7.7) se preserva de la planta nominal a la planta real, y además se preserva la estabilidad, decimos que el sistema tiene desempeño robusto.

El desempeño robusto, como intuitivamente puede esperarse, requiere la estabilidad robusta (7.6) como condición necesaria. El siguiente resultado establece una condición necesaria y suficiente para el desempeño robusto de los sistemas de la Figura 7.1, 7.4.

**Teorema 7.2 (Desempeño robusto con incertidumbre multiplicativa).** Sea la planta nominal  $\hat{G}_0(s)$  con incertidumbre de modelo  $\hat{\Delta}(s)$  estable y dada por (7.4) y (7.5). Entonces, si los lazos de control de la Figura 7.1, 7.4 son estables, y se cumple (7.7) con la planta nominal  $\hat{G}_0(s)$ , el sistema tiene desempeño robusto si y sólo si

$$|W_1(\omega)\hat{S}_0(j\omega)| + |W_2(\omega)\hat{T}_0(j\omega)| < 1, \quad \text{para todo } \omega, \quad (7.8)$$

donde  $\hat{S}_0(j\omega)$  y  $\hat{T}_0(j\omega)$  son la sensibilidad y sensibilidad complementaria nominales (de (7.2) con  $\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s)$ ).

*Demostración.* Ver Sánchez Peña [1992, §2] o Doyle et al. [1992, §4]. □

La condición de desempeño robusto también admite una buena interpretación gráfica:

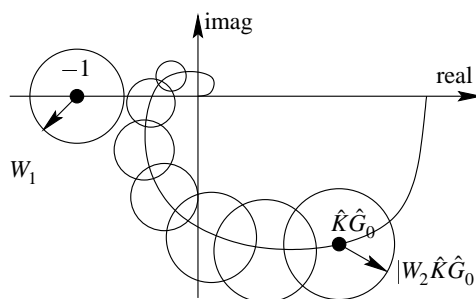


Figura 7.8: Desempeño robusto gráficamente

## 7.4. Limitaciones de Diseño

Como conclusión de las secciones anteriores, se pueden especificar las propiedades del sistema de control a lazo cerrado, desempeño y robustez, especificando la forma de las respuestas en frecuencia  $\hat{S}(j\omega)$  y  $\hat{T}(j\omega)$ . Estas especificaciones se hacen en función de lo que se pretende del sistema dentro del particular problema de control considerado.

Sin embargo, no hay libertad absoluta para elegir  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$ . Como veremos en esta sección, hay factores inherentes al problema de control que limitan el desempeño y/o la robustez alcanzables por el sistema.

### 7.4.1. Restricciones algebraicas en $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$

Existen restricciones en los valores que pueden tomar  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$  para ciertos valores de  $s \in \mathbb{C}$ . Estas restricciones se trasladan a su vez como restricciones sobre los valores en el eje  $j\omega$ ,  $\hat{S}(j\omega)$  y  $\hat{T}(j\omega)$ .

La restricción más obvia es la relación de complementariedad

$$\hat{S}(s) + \hat{T}(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Otras restricciones surgen en los ceros y polos a lazo abierto debido al requerimiento de estabilidad del lazo cerrado.

**Lema 7.1 (Restricciones de Interpolación).** Si el sistema a lazo abierto  $\hat{L}(s)$  no tiene cancelaciones polo-cero inestables, entonces, para cualquier control que estabilice al sistema a lazo cerrado,  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$  deben satisfacer las siguientes condiciones

1. si  $p$  es un polo inestable de  $\hat{L}(s)$  ( $\text{Re } p \geq 0$ )

$$\hat{S}(p) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{T}(p) = 1.$$

2. si  $q$  es un cero de fase no mínima de  $\hat{L}(s)$  ( $\text{Re } q \geq 0$ )

$$\hat{S}(q) = 1 \quad \text{y} \quad \hat{T}(q) = 0.$$

*Demostración.* Por el requerimiento de estabilidad del lazo cerrado, ceros y polos con parte real positiva de la planta o el controlador no pueden cancelarse, por lo que permanecerán en  $\hat{L}(s)$ . Las condiciones de interpolación siguen directamente de las definiciones de  $\hat{S}(s)$  y  $\hat{T}(s)$ .  $\square$

Sea cual fuera el controlador elegido, las funciones de sensibilidad deberán satisfacer estas restricciones en los polos y ceros de parte real no negativa del lazo abierto.

### 7.4.2. Especificaciones de diseño en la respuesta temporal

Alternativamente a la especificación de la respuesta en frecuencia, la especificación del desempeño del sistema a lazo cerrado suele hacerse sobre la respuesta temporal del sistema. La especificación de la respuesta temporal es más directa respecto de lo que se pretende del sistema, pero entonces es más difícil traducir estas especificaciones a condiciones para las funciones transferencia del lazo cerrado.

Los parámetros típicos para la respuesta al escalón son

- sobrevalor  $y_{sob}$
- subvalor  $y_{sub}$
- tiempo de crecimiento  $t_c$
- tiempo de establecimiento  $t_e$

Definimos los parámetros de la respuesta al escalón sobre el sistema de la Figura 7.1, y definimos el *error de seguimiento*  $e(t) = r(t) - y(t)$ .

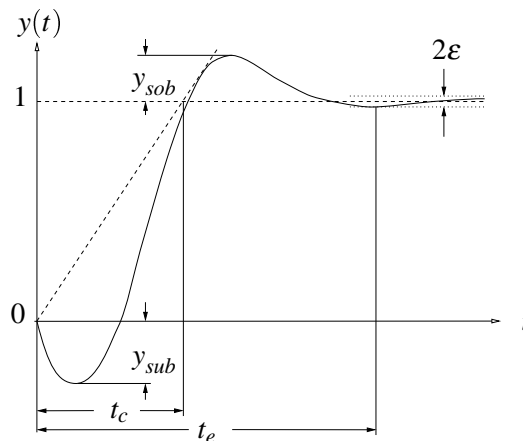


Figura 7.9: Especificaciones en la respuesta temporal

**sobrevalor:** es el máximo valor en que la respuesta del sistema excede su valor de régimen permanente,

$$y_{sob} \triangleq \max_t \{-e(t)\}.$$

**subvalor:** es máximo pico negativo de la salida del sistema,

$$y_{sub} \triangleq \max_t \{-y(t)\}.$$

**tiempo de crecimiento:** cuantifica aproximadamente el tiempo mínimo que toma la salida en alcanzar el nuevo punto de operación,

$$t_c \triangleq \max_{\delta} \{ \delta : y(t) \leq t/\delta \text{ para todo } t \text{ en el intervalo } [0, \delta] \}$$

**tiempo de establecimiento:** cuantifica el tiempo que tardan los transitorios en decaer permanentemente por debajo de un determinado nivel  $\varepsilon$ , usualmente entre el 1 y 10% del valor de régimen permanente,

$$t_e \triangleq \min_{\delta} \{ \delta : |e(t)| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \text{ en el intervalo } [\delta, \infty) \}$$

### 7.4.3. Restricciones en la respuesta al escalón

Como vimos, los polos y ceros en el semiplano derecho del plano complejo imponen restricciones algebraicas en las funciones de sensibilidad del sistema, no importa cual sea el controlador usado. Veremos ahora cómo estas restricciones algebraicas se traducen en restricciones en el desempeño alcanzable en la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado.

Usaremos el siguiente resultado preliminar, que surge de la definición de transformada Laplace.

**Lema 7.2.** Sea  $\hat{h}(s)$  una función transferencia estrictamente propia cuyos polos se encuentran en el semiplano  $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \leq -\alpha\}$ , para algún número real finito  $\alpha > 0$ . Sea  $h(t)$

la antitransformada Laplace de  $\hat{h}(s)$ . Entonces para cualquier número  $s_0 \in \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > -\alpha\}$

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} h(t) dt = \lim_{s \rightarrow s_0} \hat{h}(s).$$

*Demostración.* De la definición de la Transformada de Laplace, para todo  $s$  en la *región de convergencia de la transformada*,  $\operatorname{Re} s > -\alpha$ , se cumple que

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt.$$

Como  $s_0$  está en la región de convergencia, queda probado el resultado.  $\square$

La salida y el error de seguimiento en la respuesta al escalón del sistema de la Figura 7.1 satisfacen las siguientes condiciones integrales.

**Teorema 7.3 (Polos inestables).** Supongamos que el sistema a lazo abierto  $\hat{L}(s)$  tiene un polo en  $p$ , con  $\operatorname{Re} p > 0$ . Entonces si el lazo cerrado es asintóticamente estable

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt = 0 \quad (7.9)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt = \frac{1}{p} \quad (7.10)$$

*Demostración.* Al ser el sistema asintóticamente estable es BIBO, y entonces el error  $e(t)$  producido por una entrada acotada es acotado, digamos  $|e(t)| \leq M, \forall t$ . Así, la transformada de Laplace del error,  $\hat{e}(s)$  no tendrá singularidades en  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} |\hat{e}(s)| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-st} e(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re} s t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} s} < \infty \quad \text{para todo } s : \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 7.2, la ecuación (7.9) sigue de

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt = \hat{e}(p) = \frac{\hat{S}(p)}{p} = 0,$$

donde usamos la relación  $\hat{e}(s) = \hat{S}(s)\hat{r}(s)$ , el hecho de que la referencia es un escalón,  $\hat{r}(s) = 1/s$ , y la restricción de interpolación de  $\hat{S}(s)$  en los polos inestables de  $\hat{L}(s)$ .

La ecuación (7.10) sigue de (7.9) y el hecho de que  $r(t) = 1$  para todo  $t$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-pt} (r(t) - e(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

$\square$

Un resultado dual existe para plantas con ceros de fase no mínima.

**Teorema 7.4 (Ceros de fase no mínima).** Supongamos que el sistema a lazo abierto  $\hat{L}(s)$  tiene un cero en  $q$ , con  $\text{Re } q > 0$ . Entonces si el lazo cerrado es estable

$$\int_0^{\infty} e^{-qt} e(t) dt = \frac{1}{q} \quad (7.11)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-qt} y(t) dt = 0. \quad (7.12)$$

*Demostración.* Ejercicio. □

Estos teoremas muestran que si la planta tiene ceros o polos en el semiplano derecho del plano complejo, entonces el error y la salida a una entrada escalón deben satisfacer relaciones integrales *independientemente* del controlador usado para estabilizar el sistema. Damos ahora interpretaciones de diseño de estas integrales en términos de los parámetros de la respuesta al escalón.

**Corolario 7.1 (Polos inestables reales y sobrevalor).** Si la planta tiene un polo inestable real en  $p > 0$ , su respuesta al escalón tiene forzosamente sobrevalor. Más aún, si  $t_c$  es el tiempo de crecimiento del sistema a lazo cerrado, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} y_{sob} &\geq \frac{(pt_c - 1)e^{pt_c} + 1}{pt_c} \\ &\geq \frac{pt_c}{2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

*Demostración.* Necesariamente el error deberá cambiar de signo para que la integral (7.9) sea nula — a menos que sea idénticamente nulo. Así, la salida deberá superar a la referencia en algún momento  $\Leftrightarrow \exists$  sobrevalor.

De la definición de  $t_c$  tenemos que  $y(t) \leq t/t_c$  para  $t \leq t_c$ , o sea que  $e(t) \geq 1 - t/t_c$ . Usando esta cota en la integral (7.9) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_c} e^{-pt} e(t) dt + \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} e(t) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt + \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} e(t) dt \\ &\Leftrightarrow \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} (-e(t)) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt. \end{aligned} \quad (7.14)$$

De (7.14) y la definición de sobrevalor tenemos que

$$\begin{aligned} y_{sob} \frac{e^{-pt_c}}{p} &= y_{sob} \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} dt \geq \int_{t_r}^{\infty} e^{-pt} (-e(t)) dt \\ &\geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt = \frac{(pt_c - 1) + e^{-pt_c}}{p^2 t_c}, \end{aligned}$$

de donde surge (7.13). □

Sigue del Corolario 7.1 que si la planta tiene un polo inestable:

- necesariamente hay sobrevalor en la respuesta al escalón
- el sobrevalor será mayor cuanto mayor sea el tiempo de respuesta del lazo cerrado.

Los polos inestables demandarán acción de control rápida para un mejor desempeño (menor sobrevalor). Cuanto mayores (más rápidos) sean los polos inestables, mayor será esta demanda.

**Ejemplo 7.5.** Supongamos que nuestra planta a lazo abierto tiene un polo en  $p = 2$ . Entonces tenemos que la cota en sobrevalor en la respuesta al escalón del lazo cerrado (estable) es

$$y_{sob} \geq t_c.$$

Si diseñamos el controlador para obtener un tiempo de crecimiento  $t_r = 1s$ , el sobrevalor será mayor al 100%! Para una respuesta razonable deberíamos elegir al menos  $t_c \leq 0,2s$ .

**Corolario 7.2 (Ceros de fase no mínima y subvalor).** Si la planta tiene un cero de fase no mínima real en  $q > 0$ , su respuesta al escalón tiene forzosamente subvalor. Más aún, si  $t_e$  es el tiempo de establecimiento a un nivel  $\varepsilon$  del sistema a lazo cerrado, entonces se cumple que

$$y_{sub} \geq \frac{1 - \varepsilon}{e^{qt_e} - 1}.$$

*Demostración.* Similar a la del Corolario 7.1. Ejercicio. □

La interpretación del Corolario 7.2 es que si la planta tiene un cero real de fase no mínima,

- necesariamente hay subvalor en la respuesta al escalón
- el pico del subvalor será mayor cuanto menor sea el tiempo de establecimiento del lazo cerrado.

Los ceros de fase no mínima demandarán acción de control lenta para un mejor desempeño (menor subvalor). Cuanto menores (más lentos) sean los ceros de fase no mínima, mayor será esta demanda.

En conclusión podemos extraer las siguientes reglas prácticas de diseño básicas para evitar sobrevalor o subvalor excesivos:

1. El polo dominante a lazo cerrado deber mayor (en magnitud) que cualquier polo inestable a lazo abierto del sistema.
2. El polo dominante a lazo cerrado deber menor (en magnitud) que el menor cero no mínima fase del sistema.

Vemos que entre las plantas inestables y no mínima fase, aquellas que posean polos a lazo abierto a la derecha de sus ceros en  $\mathbb{C}^+$  serán más “difíciles”, ya que no podremos satisfacer ambas reglas simultáneamente, y habrá un compromiso inevitable entre reducir sobrevalor o subvalor.

El siguiente resultado considera este caso.

**Corolario 7.3 (Plantas inestables y no mínima fase).** Consideremos el esquema de control de un grado de libertad con realimentación unitaria. Supongamos que  $\hat{L}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)$  tiene un cero real  $q > 0$  y un polo real  $p > 0$ , con  $p \neq q$ . Entonces

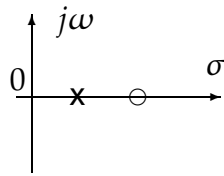


Figura 7.10: Caso manejable

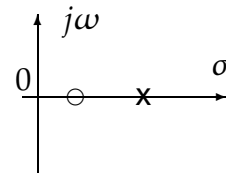


Figura 7.11: Caso difícil

1. si  $p < q$  el sobrevalor satisface

$$y_{sob} \geq \frac{p}{q - p}, \tag{7.15}$$

2. si  $q < p$  el subvalor satisface

$$y_{sub} \geq \frac{q}{p - q}. \tag{7.16}$$

*Demostración.* Para el caso 1, combinando las relaciones integrales de los Teoremas 7.3 y 7.4 sobre polos inestables y ceros de fase no mínima obtenemos

$$\int_0^\infty (e^{-pt} - e^{-qt})(-e(t))dt = \frac{1}{q}.$$

De la definición de sobrevalor entonces sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &\leq y_{sob} \int_0^\infty (e^{-pt} - e^{qt})dt \\ &= y_{sob} \frac{q - p}{pq}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Finalmente, la relación (7.15) sale inmediatamente de (7.17) pues  $q > p$ . De la misma manera se prueba 2 usando las restantes relaciones integrales y usando el hecho de que  $p > q$ .  $\square$

**Ejemplo 7.6.**

Consideremos el sistema de péndulo invertido de la Figura 7.12. El modelo linealizado alrededor del origen de este sistema tiene la siguiente función transferencia entre la fuerza  $u$  y la posición del carro  $y$ :

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{(s - q)(s + q)}{M(s^2(s - p)(s + p))}$$

donde  $q = \sqrt{g/\ell}$  y  $p = q\sqrt{1 + m/M}$ . Vemos que el sistema satisface las condiciones del corolario anterior. Si normalizamos para que  $q = 1$  y consideramos  $m = M$ , obtenemos que  $p = \sqrt{2}$ . Entonces el corolario anterior predice un subvalor superior a 2 en la respuesta al escalón! La Figura 7.13 muestra los resultados de simulaciones del lazo cerrado controlado con distintas velocidades de respuesta.

Vemos que el subvalor es en todos los casos mucho mayor que la cota inferior de 2.

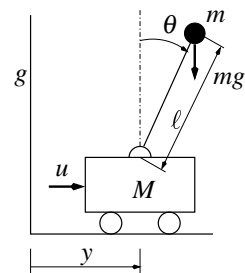


Figura 7.12: Péndulo invertido

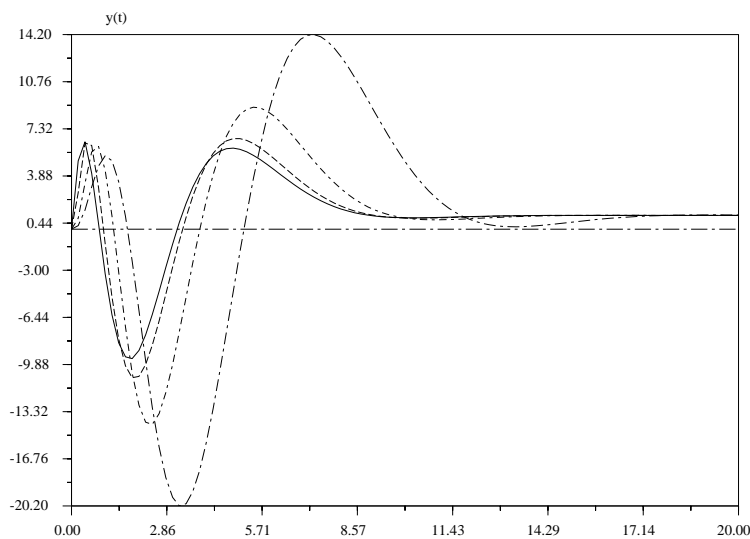


Figura 7.13: Respuesta a lazo cerrado del péndulo invertido

## 7.5. Resumen

La implementación práctica de un sistema de control está afectado de perturbaciones e incertidumbres de modelado que afectarán su desempeño, apartándolo de las especificaciones idealizadas en la etapa de diseño. Algunas de estas perturbaciones e incertidumbres pueden tenerse en cuenta de cierta forma en el diseño si se lleva a cabo un diseño robusto.

Distinguimos las propiedades de robustez en

1. Estabilidad robusta: el sistema real preserva las características de estabilidad (Lyapunov, BIBO, etc.) del sistema nominal.<sup>1</sup>
2. Desempeño robusto: el sistema real preserva las características de respuesta a referencias y rechazo de perturbaciones del sistema nominal.

El análisis de las propiedades de robustez y rechazo de perturbaciones

- Estabilidad nominal
- Desempeño nominal
- Estabilidad robusta
- Desempeño robusto

del sistema de control puede hacerse a priori, sin embargo, mediante las *funciones de sensibilidad*, que capturan funciones transferencia cruciales en el lazo de control.

Los ceros y polos a lazo abierto en el semiplano derecho  $\mathbb{C}^+$  imponen restricciones fundamentales en la respuesta del sistema. Estas restricciones valen para todo controlador estabilizante.

<sup>1</sup>En lo que sigue, con “estabilidad” nos referiremos a estabilidad interna asintótica.



**compromiso velocidad/sobrevalor** si la planta tiene un polo real inestable, necesariamente existirá sobrevalor en la respuesta al escalón. Cuanto más *lento* se diseñe el lazo cerrado, *mayor será el sobrevalor*.

**compromiso velocidad/subvalor** si la planta tiene un cero real no mínima fase, necesariamente existirá subvalor en la respuesta al escalón. Cuanto más *rápido* se diseñe el lazo cerrado, *mayor será el subvalor*.

Estos compromisos indican que para un desempeño aceptable, los polos inestables requieren un lazo cerrado rápido, mientras que los ceros no mínima fase uno lento.

## 7.6. Ejercicios

**Ejercicio 7.1.** Considerar el control en realimentación de una planta con modelo  $\hat{G}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ . Suponiendo que el controlador es tal que la sensibilidad complementaria es

$$\hat{T}(s) = \frac{4}{(s+2)^2},$$

1. calcular la función transferencia del controlador  $\hat{K}(s)$ ,
2. si la referencia es un escalón, calcular la respuesta en régimen permanente de la señal de entrada de la planta.
3. calcular el máximo error instantáneo en la salida siguiendo a esta referencia.

**Ejercicio 7.2.** El modelo nominal de una planta es un doble integrador  $\hat{G}_0(s) = 1/s^2$ . Un modelo más detallado (que tomamos como la planta "real") incluye un retardo, de forma que  $\hat{G}(s) = e^{-\tau s}/s^2$ , y sólo se sabe que  $\tau$  pertenece al intervalo  $[0, 0,1]$ . Expresar esta incertidumbre como multiplicativa y obtener una función  $W_2(\omega)$  tal que

$$\left| \frac{\hat{G}(j\omega)}{\hat{G}_0(j\omega)} - 1 \right| \leq W_2(\omega), \quad \forall \omega, \tau.$$

**Ejercicio 7.3.** La función transferencia de una planta está dada por

$$\hat{G}_0(s) = \frac{k}{s-2},$$

donde la ganancia  $k$  es incierta pero se sabe que pertenece al intervalo  $[0,1, 10]$ . Representar la familia de plantas posibles con un modelo de incertidumbre multiplicativa, eligiendo una planta nominal y una función peso  $W_2(\omega)$  tales que

$$\left| \frac{\hat{G}(j\omega)}{\hat{G}_0(j\omega)} - 1 \right| \leq W_2(\omega), \quad \forall \omega, k.$$

**Ejercicio 7.4.** Para el modelo nominal de un doble integrador  $\hat{G}_0(s) = 1/s^2$ , el requerimiento de desempeño es que la salida de la planta siga referencias en el intervalo de frecuencias  $[0, 1]$ . La función peso de desempeño  $W_1(\omega)$  puede elegirse como la magnitud de un filtro pasa-bajos de magnitud constante en este rango de frecuencias, y que decae a frecuencias

mayores, como por ejemplo un filtro Butterworth. Elegir un filtro Butterworth de tercer orden para  $W_1(\omega)$  con frecuencia de corte 1rad/s. Tomar el peso  $W_2(\omega)$  como

$$W_2(\omega) = \left| \frac{j\omega}{0,1j\omega + 1} \right|.$$

1. Diseñar un controlador propio  $\hat{K}(s)$  para obtener estabilidad nominal del lazo de control.
2. Chequear la condición de estabilidad robusta  $|W_2(\omega)\hat{T}_0(j\omega)| < 1$ . Si no se satisface, rediseñar  $\hat{K}(s)$  hasta conseguirlo. No es necesario obtener buen desempeño.
3. Si la condición de estabilidad robusta se satisface, el *mínimo nivel de desempeño robusto*  $\alpha$  es el valor

$$\alpha \triangleq \sup_{\omega} \left| \frac{W_1(\omega)\hat{S}_0(j\omega)}{1 - |W_2(\omega)\hat{T}_0(j\omega)|} \right|.$$

¿Cuál es el valor de  $\alpha$  alcanzado por el controlador elegido?

**Ejercicio 7.5.** Obtener los parámetros de la respuesta al escalón de

$$\hat{G}(s) = \frac{(\frac{s}{3} - 1)(s - 1)}{(\frac{s}{4} + 1)(s^2 + s + 1)}$$

**Ejercicio 7.6.** Probar el Teorema 7.4 y el Corolario 7.2.

**Ejercicio 7.7.** Dado el sistema

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(2s - 1)}$$

diseñar un controlador PI,  $\hat{K}(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}$ , para obtener error estático nulo y un tiempo de crecimiento  $t_c \geq 1s$ . Estimar el sobrevalor en la respuesta usando (7.13). ¿Cuál es el sobrevalor efectivo en el sistema?

**Ejercicio 7.8.** El modelo nominal de una planta es

$$\hat{G}(s) = \frac{5(s - 1)}{(s + 1)(s - 5)}.$$

Esta planta debe controlarse con un lazo en realimentación de un grado de libertad.

1. Determinar las restricciones en la respuesta al escalón.
2. ¿Por qué es el control de esta planta especialmente difícil? Discutir.

**Ejercicio 7.9.** Considerar la planta dada por

$$\hat{G}(s) = \frac{s - z_p}{s(s - p_p)}.$$

1. Obtener expresiones para los parámetros  $k_c, z_c, p_c$  del controlador

$$\hat{K}(s) = k_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

de forma tal que los polos de lazo cerrado estén todos en  $s = -1$ .

2. Tabular los parámetros del controlador y cotas para el sobrevalor y el subvalor<sup>2</sup> de la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado para los siguientes casos:

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$z_p$	0.5	0.5	0.2
$p_p$	-0.5	0.2	0.5
$k_c$			
$z_c$			
$p_c$			
$y_{sob} \geq$			
$y_{sub} \geq$			

3. Con los valores calculados simular el sistema a lazo cerrado y medir los valores efectivos de sobrevalor y subvalor obtenidos. Comparar con las cotas teóricas.

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$y_{sob} =$			
$y_{sub} =$			

<sup>2</sup>Tomar un tiempo de establecimiento  $t_e$  al  $\varepsilon = 3\%$  de aproximadamente  $t_e = 7s$ .

# Bibliografía

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Pub. Co., 1992.
- B. Friedland. *Control System Design*. McGraw-Hill, 1986.
- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2000.
- G.C. Goodwin and K.S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- Ricardo Sánchez Peña. *Introducción a la teoría de control robusto*. Asociación Argentina de Control Automático, 1992.
- M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.
- C.F. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(3):395–404, June 1978.