Descripción del sistema

La Figura 1 ilustra una plataforma de las usadas para estudiar sistemas de suspensión para automóviles. La plataforma está suspendida por sus extremos mediante sistemas independientes de resortes y amortiguadores de fricción viscosa.

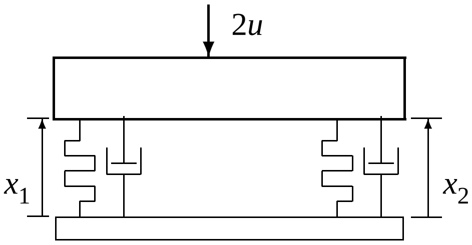

Figura 1: Sistema plataforma

Asumiendo la masa de la plataforma cero, cada sistema de amortiguación en los extremos recibe la mitad de la fuerza aplicada a la plataforma. Tomando los desplazamientos de la posición de equilibrio de los extremos de la plataforma como variables de estado, la siguiente ecuación de estados describe la dinámica de este sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -k_1/b_1 & 0 \\ 0 & -k_2/b_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/b_1 \\ 1/b_2 \end{bmatrix} u.$$

Si los desplazamientos iniciales son distintos de cero, y si no hay fuerza aplicada, la plataforma va a volver a su posición de equilibrio exponencialmente (los autovalores de la matriz A del sistema son $-0{,}5$ y -1, por lo que el sistema es asintóticamente estable). En teoría el sistema tomaría un tiempo infinito en alcanzar su posición de equilibrio.

Modelo en MATLAB

En primera instancia asumimos las constantes de los resortes, $k_1 = k_2 = 1$ y los coeficientes de fricción viscosa, $b_1 = 2$ y $b_2 = 1$. Nos planteamos el siguiente problema: si $x_1(0) = 10$ y $x_2(0) = -1$, ¿podemos aplicar una fuerza que lleve la plataforma a su posición de equilibrio en 2 segundos? La respuesta no parece obvia pues la *misma* fuerza se aplica a los dos sistemas de amortiguación.

Introduzcamos el sistema en MATLAB. Correr MATLAB y abrir un archivo nuevo en el *Editor*. Copiar y pegar los siguientes comandos para definir el modelo del sistema:

```
k1=1;k2=1;
b1=2;b2=1;
A=diag([-k1/b1,-k2/b2]);
B=[1/b1;1/b2];
C=eye(2,2);
D=0;
G=ss(A,B,C,D);
```

No olvidar salvar el archivo antes de correrlo, y de agregar el *path* del archivo al *Path browser* en la ventana de comandos de MATLAB (esto último sólo una vez por sesión). Corriendo el archivo desde el *Editor* (`run` en el menú `tools`) efectivizamos la definición del modelo en el ambiente de trabajo de MATLAB.

Controlabilidad

Veamos si el sistema es controlable. Calculamos el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2. \tag{1}$$

```
Con=ctrb(A,B)
rank(Con)
```

Vemos que el sistema es controlable. Esto quiere decir que para cualquier estado inicial $x(0)$, existe una entrada que transfiera al sistema de $x(0)$ a su posición de equilibrio en, digamos, 2 segundos.

Control de mínima energía

Vamos a calcular el control (a lazo abierto) de *mínima energía* para llevar el sistema de su estado inicial $x_0 = \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ al equilibrio $x(2) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ en $t_f = 2$ segundos. Según lo visto en clase, necesitamos computar la matriz

$$\begin{aligned}
W_c(2) &= \int_0^2 e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau \\
&= \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau \\
&= \begin{bmatrix} 0,2162 & 0,3167 \\ 0,3167 & 0,4908 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

En MATLAB usamos la fórmula de Van Loan vista en clase

```
n=size(A);
O=zeros(n,n);
I=eye(n);
tf=2;
W=[I,O]*expm([A,B*B';O,-A']*tf)*[O;expm(A'*tf)]
```

Calculamos ahora la fuerza $u_2(t)$ necesaria

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= -B' e^{A'(2-t)} W_c^{-1}(2) (e^{A2} x_0) \\
&= -\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0,5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} W_c^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= -58,82 e^{0,5t} + 27,96 e^{t}
\end{aligned}$$

Para generar esta señal de control en MATLAB necesitamos definir el intervalo de tiempo $T = [0,2]$ y evaluar $u_2(t)$ para cada $t \in T$, por ejemplo de la siguiente manera:

```
T=linspace(0,tf);
x0=[10;-1];
for i=1:length(T)
  t=T(i);
  u(i)=-B'*expm(A'*(tf-t))*inv(W)*expm(A*tf)*x0;
end
```

Podemos graficar esta señal con el comando

```
plot(T,u);
xlabel('tiempo [s]');
ylabel('u(t)');
title('Control de minima energia en 2 segundos')
```

Para simular la respuesta del sistema a esta entrada y con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, usamos el comando `lsim`, y guardamos respuesta en la variable `y`. Graficamos la evolución de los estados junto a la señal de control en la Figura 2.

```
y=lsim(G,u,T,x0);
plot(T,y,T,u)
xlabel('tiempo [s]')
legend('x_1(t)','x_2(t)','u(t)')
```

Si recalculamos la fuerza necesaria para transferir el estado de x_0 al equilibrio pero ahora en 4 segundos (sólo hay que cambiar la línea `tf=2;` por `tf=4;`) obtenemos

$$\begin{aligned}
W_c(4) &= \begin{bmatrix} 0,2454 & 0,3325 \\ 0,3325 & 0,4998 \end{bmatrix} \\
u_4(t) &= -3,81 e^{0,5t} + 0,69 e^{t}
\end{aligned}$$

graficado junto a la evolución de los estados en la Figura 3. Notar que el control que hace la misma tranferencia en un tiempo mayor es significativamente más pequeño (usa menos energía). ¿Cuál será el control de mínima energía si $t \to \infty$?

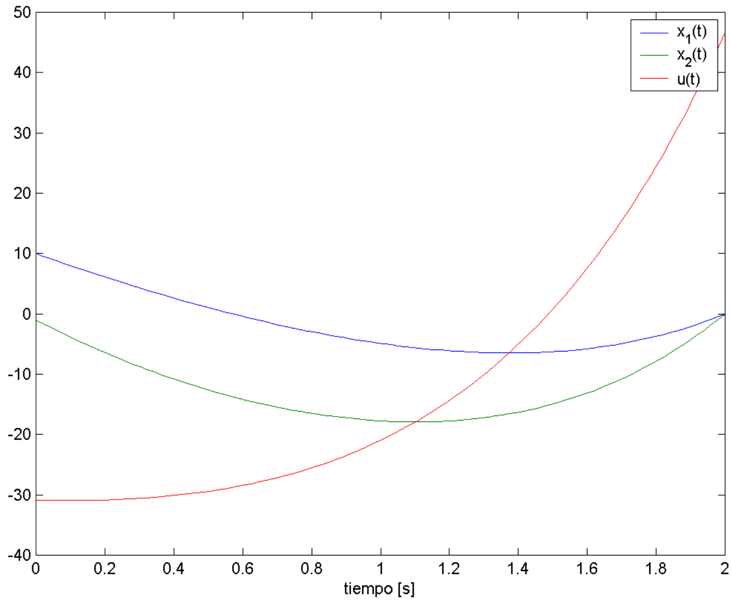

Figura 2: Control en lazo abierto en 2 segundos

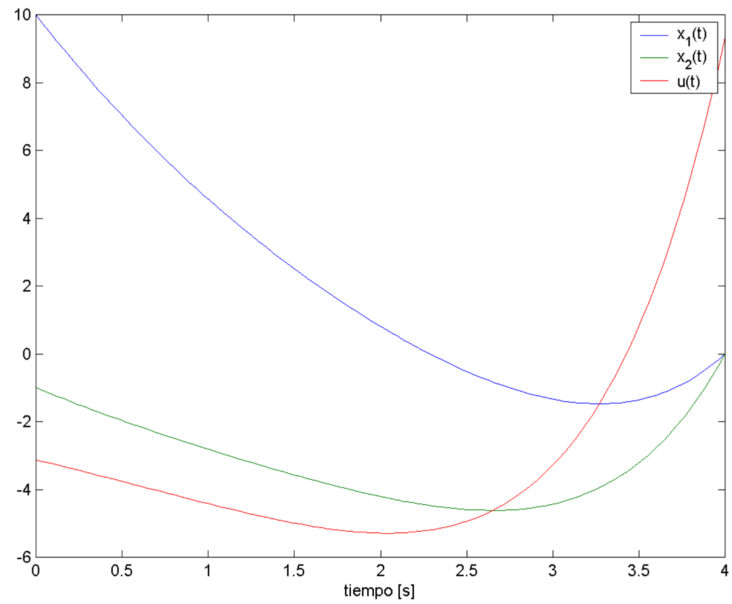

Figura 3: Control en lazo abierto en 4 segundos

Ejercicios

Asumiendo en (1) $k_1 = k_2 = b_2 = 1$, y para los tres valores $b_1 = 1{,}5$, $b_1 = 1{,}2$, y $b_1 = 1$,

1. Analizar la controlabilidad del sistema.
2. Si el sistema fuera controlable, determinar el control a lazo abierto de mínima energía que transfiere al sistema de $x(0) = [10, -1]'$ al equilibrio en 2 segundos.
3. Comparar las energías mínimas de control con la gastada en el caso $b_1 = 2$. ¿Qué conclusión puede extraerse respecto a la relación entre “grado de controlabilidad” y energía necesaria para controlar?