INGENIERÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL INDUSTRIAL	UNIVERSIDAD NACIONAL DE QUILMES
Control No Lineal 1999	
Parcial 1	**Estabilidad Lyapunov**
27 de septiembre de 1999	**Duración:** 3 horas

Problema 1. Investigar la estabilidad del origen de los siguientes sistemas. Para los sistemas (1) y (2), además, dibujar cualitativamente el plano de fase.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2)\operatorname{sen} x_1 - 3x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Problema 2. Mostrar que el origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^6 - x_2^3 \end{aligned}$$

es inestable. (**Ayuda:** Mostrar que el conjunto $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1\} \cap \{x_2 \geq x_1^3\} \cap \{x_2 \leq x_1^2\}$ es no vacío y positivamente invariante. Luego investigar el comportamiento de las trayectorias dentro de Γ.)

Problema 3. Mostrar que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1(3 - x_1 x_2) \end{aligned}$$

tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable. (**Ayuda:** Encuantre el equilibrio y haga un cambio de coordenadas $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ para correrlo al origen. Luego use la función $V(y_1, y_2) = k_1 \frac{y_1^2}{2} + k_2 \frac{y_2^2}{2} + k_3 \frac{y_1^4}{4}$ para mostrar EAG del origen en las coordenadas (y_1, y_2).)

Problema 4. Para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1 x_2 - 1)x_1^3 + (x_1 x_2 - 1 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

(a) Mostrar que $x = 0$ es el único punto de equilibrio.

(b) Mostrar, por linealización, que $x = 0$ es asintóticamente estable.

(c) Mostrar que $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 2\}$ es positivamente invariante en el primer cuadrante.

(d) ¿Es el equilibrio GAE? Justificar la respuesta.