Asignación de autovalores por realimentación

Consideramos el sistema lineal estacionario de una entrada y una salida

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \qquad & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \\ y &= Cx. & y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

En estas apostillas repasamos cómo asignar los autovalores de este sistema por realimentación de estados, $u = -Kx$, mediante una elección adecuada de la matriz $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Vamos a ver cómo calcular K, tanto analíticamente, como con MATLAB. Comenzamos presentando el resultado teórico que justifica estos cálculos. Para más detalles ver por ejemplo [1].

La función transferencia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ del sistema (1) es una función escalar de la forma

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n}. \tag{2}$$

Vamos a asumir que el sistema (1) — o bien, el par (A, B) — es controlable [1], lo que es equivalente a que la *matriz de controlabilidad*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tenga rango completo. Bajo esta condición, el sistema (1) puede entonces llevarse a la forma «companion» llamada *forma canónica del controlador*

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_1 \end{bmatrix} \bar{x}(t), \end{aligned} \tag{3}$$

mediante el cambio de coordenadas $\bar{x} = Px$, donde

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Teorema (Asignación de autovalores). Si la ecuación de estados (1) es controlable, entonces mediante la realimentación de estados $u = -Kx$, donde K es un vector real constante $1 \times n$, los autovalores de $A - BK$ pueden ser asignados arbitrariamente, siempre que los autovalores complejos conjugados se asignen en pares.

Demostración. Si (1) es controlable puede llevarse a la forma (3). Denotemos con $\bar{A}$ y $\bar{B}$ las matrices en (3). Así tenemos que $\bar{A} = PAP^{-1}$ y $\bar{B} = PB$. Puede verse también que

$$\bar{\mathcal{C}} \triangleq [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \ldots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = P[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = P\mathcal{C}, \tag{5}$$

por lo que $P^{-1} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$ y la matriz de la extrema derecha en (4) es $\bar{\mathcal{C}}$.

La substitución de $\bar{x} = Px$ en la realimentación de estados da

$$u = r - Kx = r - KP^{-1}\bar{x} \triangleq r - \bar{K}\bar{x},$$

donde $\bar{K} = KP^{-1}$. Puesto que $\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = P(A - BK)P^{-1}$, vemos que $A - BK$ y $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ tienen los mismos autovalores.

Ahora, dado cualquier conjunto de n autovalores deseados, podemos formar el polinomio característico deseado

$$\Delta_K(s) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_n. \tag{6}$$

Eligiendo

$$\bar{K} = [\bar{\alpha}_n - \alpha_n, \ldots, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2, \bar{\alpha}_1 - \alpha_1]$$

la ecuación de estado de lazo cerrado deviene (en las coordenadas transformadas)

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{\alpha}_n & -\bar{\alpha}_{n-1} & -\bar{\alpha}_{n-2} & \cdots & -\bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \bar{x}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_1 \end{bmatrix} \bar{x}(t).
\end{aligned}$$

Por estar en forma «companion», el polinomio característico de $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$, y consecuentemente el de $(A - BK)$, es (6). Así el sistema realimentado tiene los autovalores deseados.

Finalmente, la ganancia de realimentación en las coordenadas originales es, usando (5),

$$K = \bar{K}P = \bar{K}\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1}.$$

□

¿Cómo calcular K?

El siguiente procedimiento, basado en la demostración del Teorema anterior, se conoce como la *fórmula de Bass-Gura*.

1. Obtener los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ del polinomio característico $\Delta(s)$ a lazo abierto.
2. Formar las matrices de controlabilidad $\mathcal{C} = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ y

$$\bar{\mathcal{C}} = R^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

3. Elegir los coeficientes $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ del polinomio característico deseado $\Delta_K(s)$ y determinar la ganancia de realimentación en coordenadas de $\bar{x}$

$$\bar{K} = [\bar{\alpha}_n - \alpha_n, \ldots, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2, \ldots, \bar{\alpha}_1 - \alpha_1].$$

4. Determinar la ganancia de realimentación en coordenadas originales

$$K = \bar{K}\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1}.$$

Este procedimiento puede implementarse en MATLAB con la siguiente secuencia de instrucciones, una vez que se han definido A, B y los coeficientes del polinomio característico deseado $[1, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n]$ (digamos, en el vector `DelK`).

```
Del = poly(A);   % calcula el polinomio característico de A
n = length(Del); % calcula el orden del sistema
R = hankel(fliplr(Del(1:n-1))); % Calcula R
K = fliplr(DelK(2:n) - Del(2:n))*inv(R)*inv(ctrb(A,B)); % Calcula K
```

Alternativamente, existe en MATLAB la función `place`, que calcula K a partir de A, B, y el vector de *autovalores* deseados P con la sintaxis

```
K = place(A,B,P);
```

Esta alternativa es más simple y es válida además para sistemas de más de una entrada, aunque no permite que la multiplicidad de ningún autovalor deseado sea mayor que el número de entradas.

¿Dónde ubicar los autovalores deseados?

Sabiendo ya cómo asignar autovalores a lazo cerrado por realimentación de estados, resta decidir dónde colocar estos autovalores. Damos ahora algunas pautas a tener en cuenta en esta elección. Dado el polinomio característico deseado

$$\Delta_K(s) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_n 1.$$

la fórmula de Bass-Gura da la ganancia de realimentación

$$K = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_n \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \\ \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \mathcal{C}^{-1}, \tag{7}$$

donde $\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{-1}B]$ es la matriz de controlabilidad del sistema.

Notemos de (7) que K será mayor en magnitud (norma):

- cuanto más se desplacen los autovalores respecto de las posiciones de lazo abierto (mayores diferencias entre α_i y $\bar{\alpha}_i$),
- cuanto más cerca de ser singular esté $\mathcal{C}$ (cuanto menos controlable sea el sistema, mayor esfuerzo llevará controlarlo).

Dificultades de la realimentación de ganancia elevada

Si se desea estabilizar el sistema, habrá necesariamente que mover autovalores al lado izquierdo del plano complejo. Sin embargo, moverlos excesivamente a la izquierda implicará usar una ganancia K elevada. Una ganancia K elevada tenderá a hacer saturar los actuadores, trayendo efectos indeseados en el desempeño del sistema.

Es claro que si bien la estabilidad es un punto esencial en el diseño, no es el único; existen también requerimientos de velocidad de respuesta, sobrevalor, etc. En términos de función transferencia, la velocidad del sistema puede caracterizarse por su *ancho de banda*, definido como la frecuencia a partir de la cual la magnitud de $G(j\omega)$ comienza a decaer significativamente (usualmente, 3 dB).

En términos de autovalores, el ancho de banda queda determinado por los *autovalores dominantes*, es decir, aquellos cuya parte real es más cercana al origen (los de transitorios de decaimiento más lento). Así, el mover los autovalores excesivamente a la izquierda implica también un lazo cerrado de gran ancho de banda, que puede amplificar incertidumbres en el modelo y perturbaciones de alta frecuencia. Remarcamos que además, si los autovalores a lazo cerrado se sitúan a distancias desparejas del origen, el esfuerzo de control no será eficientemente distribuido, lo que implica desperdicio de energía.

Resumiendo, para una elección razonable de los autovalores:

- Elegir el ancho de banda suficientemente grande como para alcanzar los requerimientos de velocidad de respuesta deseados.
- No excederse en el ancho de banda — ojo a los efectos de ceros de fase no mínima (subvalor excesivo), y el ruido y la incertidumbre de modelado en alta frecuencia.
- Ubicar los autovalores a distancias aproximadamente uniformes del origen para un uso eficiente del esfuerzo de control.

Una configuración de autovalores común que satisface estos lineamientos es la de *Butterworth*, originaria de teoría de filtrado. La configuración Butterworth se define por 2 parámetros: la frecuencia de corte ω_0 y el orden k. La ubicación de los autovalores queda definida por las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2k} = (-1)^{k+1}.$$

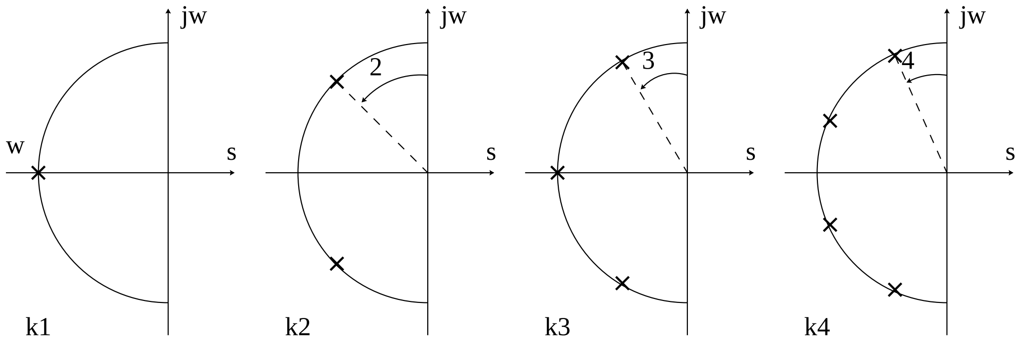

Figura 1: Configuración de polos Butterworth para $k = 1, 2, 3, 4$.

Los polinomios cuyos ceros tienen la configuración Butterworth son los *polinomios de Butterworth*. Los primeros 4 son:

$$\begin{aligned}
B_1(s) &= s + 1\\
B_2(s) &= s^2 + \sqrt{2}s + 1\\
B_3(s) &= s^3 + 2s^2 + 2s + 1\\
B_4(s) &= s^4 + 2{,}613s^3 + (2 + \sqrt{2})s^2 + 2{,}613s + 1.
\end{aligned}$$

Los filtros de Butterworth, cuyos denominadores son los polinomios de Butterworth, se pueden calcular en MATLAB con la función

```
[Num,Den] = butter(N,W0,'s')
```

Referencias

[1] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.