Capítulo 2

Propiedades Fundamentales

En este capítulo repasamos elementos de análisis matemático que vamos a usar en el resto del curso, incluyendo las propiedades fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias que hacen que $\dot{x} = f(t, x)$ sea un modelo apropiado para representar sistemas físicos. Estas propiedades son esencialmente las de

- existencia y unicidad de solución
- dependencia continua respecto de parámetros y condiciones iniciales.

Vamos a presentar los resultados para sistemas autónomos (sin entrada), y en general no estacionarios, es decir, representados por $\dot{x} = f(t, x)$.

2.1. Preliminares

Vamos a considerar frecuentemente las normas p en $\mathbb{R}^n$, definidas como

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Todas las normas p son *equivalentes* en el sentido de que si $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son dos normas p diferentes, existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Un resultado clásico relativo a normas p es la *desigualdad de Hölder*

$$|x^{\mathrm{T}}y| \le \|x\|_p\|y\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ define un mapa lineal $y = Ax$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. La norma p inducida de A está definida como

$$\|A\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

que para $p = 1, 2, \infty$ está dada por

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \left[\lambda_{max}(A^{\mathrm{T}}A)\right]^{1/2}, \qquad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

donde $\lambda_{max}(A^{\mathrm{T}}A)$ es el máximo autovalor de $A^{\mathrm{T}}A$.

2.1.1. Desigualdad de Gronwall-Bellman

Lema 2.1.1 (Desigualdad de Gronwall-Bellman). Sea $\lambda : [a,b] \to R$ una función continua y $\mu : [a,b] \to R$ continua y no–negativa. Si una función continua $y : [a,b] \to R$ satisface

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)\,ds$$

para $a \leq t \leq b$, entonces en el mismo intervalo

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}\,ds$$

Si $\lambda(t) \equiv \lambda$ es constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)d\tau}$$

y si además $\mu(t) \equiv \mu$ es constante:

$$y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}$$

Demostración. Definamos $z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s)\,ds$ y $v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$. Entonces z es diferenciable y

$$\dot{z} = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t).$$

Esta es una ecuación de estado escalar cuya función de transición de estados es

$$\phi(t,s) = e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}.$$

Como $z(a) = 0$, entonces tenemos que

$$z(t) = \int_a^t \phi(t,s)(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))ds.$$

El término $\int_a^t \phi(t,s)\mu(s)v(s)ds$ es no negativo, por lo que

$$z(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}\mu(s)\lambda(s)ds,$$

que, usando el hecho que $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$, completa la prueba en el caso general. En el caso especial de $\lambda(t) \equiv \lambda$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^t \mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}ds &= -\int_a^t \frac{d}{ds}\left(e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}\right)ds \\
&= -\left(e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}\right)\Big|_{s=a}^{s=t} \\
&= -1 + e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau},
\end{aligned}$$

que termina la prueba en el caso de λ constante. Por integración se obtiene fácilmente el resultado en el caso de μ también constante. □

2.1.2. Mapa Contractivo

Consideremos una ecuación de la forma $x = T(x)$. Una solución x^* de esta ecuación se denomina *punto fijo* del mapa T porque T deja a x^* invariante.

Vamos a enunciar el teorema del mapa contractivo en el marco de *espacios de Banach*, para lo cual recordamos las siguientes definiciones.

Definición 2.1.1 (Espacio lineal normado). Un espacio lineal $\mathcal{X}$ es un espacio lineal normado si, para cada vector $x \in \mathcal{X}$, existe una función a valores reales, llamada *norma* y denotada $\|x\|$, que satisface

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$, con $\|x\| = 0$ síí $x = 0$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathcal{X}$.

Si no estuviera claro del contexto si $\| \cdot \|$ es una norma en $\mathcal{X}$ o en $\mathbb{R}^n$, vamos a escribir $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$ para la norma de $\mathcal{X}$.

Definición 2.1.2 (Convergencia). Una secuencia $\{x_k\}$ en $\mathcal{X}$ *converge* a un vector $x \in \mathcal{X}$ si

$$\|x_k - x\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Definición 2.1.3 (Conjunto cerrado). Un conjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ es cerrado síí toda secuencia convergente con elementos en $\mathcal{S}$ tiene límite en $\mathcal{S}$.

Definición 2.1.4 (Secuencia de Cauchy). Una secuencia $\{x_k\}$ en $\mathcal{X}$ se dice *secuencia de Cauchy*

$$\|x_k - x_m\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad k, m \to \infty.$$

Notar que toda secuencia convergente es Cauchy, pero no toda secuencia Cauchy es convergente.

Definición 2.1.5 (Espacio de Banach). Un espacio lineal normado $\mathcal{X}$ es *completo* si toda secuencia de Cauchy converge a un vector en $\mathcal{X}$. Un espacio lineal normado completo es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos el conjunto de funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, al que denotamos como $C[a, b]$. Este conjunto es un espacio vectorial sobre R. La suma $x + y$ se define como $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$. La multiplicación por un escalar se define como $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$. El vector nulo es la función idénticamente nula en $[a, b]$. Definimos una norma como

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$$

donde la norma en el lado derecho es cualquier norma p en $\mathbb{R}^n$. Claramente $\|x\|_C \geq 0$ y es cero síí x es la función nula. La desigualdad triangular sigue de

$$\max \|x(t) + y(t)\| \leq \max[\|x(t)\| + \|y(t)\|] \leq \max \|x(t)\| + \max \|y(t)\|$$

Además

$$\text{máx}\,\|\alpha\, x(t)\| = \text{máx}\,|\alpha|\,\|x(t)\| = |\alpha|\,\text{máx}\,\|x(t)\|$$

donde los máximos se toman sobre $[a,b]$. Por lo tanto, $C[a,b]$ junto con la norma $\|\cdot\|_C$ es un espacio lineal normado. Vamos a probar que es también un espacio de Banach. Para eso debemos probar que toda secuencia de Cauchy en $C[a,b]$ converge a un vector en $C[a,b]$. Supongamos que $\{x_k\}$ es una secuencia de Cauchy en $C[a,b]$. Para cada $t \in [a,b]$ fijo,

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \|x_k - x_m\|_C \to 0 \quad \text{cuando} \quad k,m \to \infty$$

Por lo tanto $\{x_k(t)\}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Pero $\mathbb{R}^n$ con cualquier norma p es completo porque convergencia implica convergencia componente a componente y R es completo. Entonces existe un vector real $x(t)$ al cual la secuencia converge: $x_k(t) \to x(t)$. Esto prueba convergencia puntual. Ahora probamos que la convergencia es uniforme en $t \in [a,b]$. Dado $\epsilon > 0$ elegimos N tal que $\|x_k - x_m\|_C < \epsilon/2$ para $k,m > N$. Entonces, para $k > N$,

$$\begin{aligned}\|x_k(t) - x(t)\| &\leq \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x(t)\| \\ &\leq \|x_k - x_m\|_C + \|x_m(t) - x(t)\|\end{aligned}$$

Eligiendo m suficientemente grande (lo cual puede depender de t), cada término en el lado derecho puede hacerse menor que $\epsilon/2$; entonces $\|x_k(t) - x(t)\| < \epsilon$ para $k > N$. Por lo tanto $\{x_k\}$ converge a x, uniformemente en $t \in [a,b]$. Para completar la prueba, debemos mostrar que $x(t)$ es continua y que $\{x_k\}$ converge a x en la norma de $C[a,b]$. Para probar continuidad consideremos

$$\|x(t+\delta) - x(t)\| \leq \|x(t+\delta) - x_k(t+\delta)\| + \|x_k(t+\delta) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\|$$

Como $\{x_k\}$ converge uniformemente a x, dado $\epsilon > 0$, podemos elegir k lo suficientemente grande para hacer el primer y tercer términos del lado derecho menores que $\epsilon/3$. Como $x_k(t)$ es continua, podemos elegir δ lo suficientemente pequeño para hacer el segundo término menor que $\epsilon/3$. Por lo tanto $x(t)$ es continua. La convergencia de $\{x_k\}$ a x en la norma de $C[a,b]$ es una consecuencia directa de la convergencia uniforme. ◦

Teorema 2.1.2 (Mapa Contractivo). Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto cerrado de un espacio de Banach $\mathcal{X}$ y sea T un mapa de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$. Supongamos que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho\|x - y\|, \qquad \forall x,y \in \mathcal{S},\ 0 \leq \rho < 1.$$

Entonces T tiene un único punto fijo en $\mathcal{S}$, es decir, existe un único vector $x^* \in \mathcal{S}$ que satisface $x^* = T(x^*)$. Además, x^* puede obtenerse por el método de aproximaciones sucesivas comenzando de cualquier vector en $\mathcal{S}$.

Demostración. Tomemos un vector arbitrario $x_1 \in \mathcal{S}$ y definamos la secuencia $\{x_k\}$ por la fórmula $x_{k+1} = T(x_k)$. Como T mapea $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$, $x_k \in \mathcal{S}$ para todo $k \geq 1$. El primer paso de la prueba es mostrar que $\{x_k\}$ es una secuencia de Cauchy. Tenemos

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &= \|T(x_k) - T(x_{k-1}\| \\ &\leq \rho\|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \rho^2\|x_k - x_{k-1}\| \\ &\ \vdots \\ &\leq \rho^{k-1}\|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned}\|x_{k+r}-x_k\| &\le \|x_{k+r}-x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1}-x_{k+r-2}\| + \cdots + \|x_{k+1}-x_k\| \\ &\le \left(\rho^{k+r-2}+\rho^{k+r-3}+\cdots+\rho^{k-1}\right)\|x_2-x_1\| \\ &\le \rho^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\|x_2-x_1\| \\ &= \frac{\rho^{k-1}}{1-\rho}\|x_2-x_1\|.\end{aligned}$$

El lado derecho tiende a cero cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, la secuencia es Cauchy. Como $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach, $x_k \to x^* \in \mathcal{S}$ cuando $k \to \infty$. Además, como $\mathcal{S}$ es cerrado, en particular $x^* \in \mathcal{S}$. Ahora mostramos que $x^* = T(x^*)$. Para cualquier $x_k = T(x_{k-1})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|x^* - T(x^*)\| &\le \|x^*-x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| \\ &\le \|x^*-x_k\| + \rho\|x_{k-1}-x^*\|.\end{aligned}$$

Eligiendo k suficientemente grande, el lado derecho de la desigualdad puede hacerse arbitrariamente pequeño. Así, $\|x^* - T(x^*)\| = 0$; o sea que $x^* = T(x^*)$. Falta probar que x^* es el único punto fijo de T en $\mathcal{S}$. Supongamos entonces que hay dos puntos fijos x^* y y^*. Entonces

$$\begin{aligned}\|x^*-y^*\| &= \|T(x^*)-T(y^*)\| \\ &\le \rho\|x^*-y^*\|.\end{aligned}$$

Como $\rho < 1$, necesariamente $x^* = y^*$. □

2.2. Existencia y Unicidad

Se dan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t,x)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,. \tag{2.1}$$

Entendemos por solución en un intervalo $[t_0, t_1]$ a una función continua $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{x}$ esté definida y $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Vamos a asumir que $f(t,x)$ es continua en x pero sólo seccionalmente continua en t (esto nos va a permitir considerar entradas con saltos o escalones).

Una ecuación diferencial con una dada condición inicial puede tener varias soluciones. Por ejemplo, la ecuación escalar

$$\dot{x} = x^{1/3}\,, \qquad x(0) = 0$$

tiene como soluciones tanto $x(t) = (2t/3)^{3/2}$ como $x(t) \equiv 0$. Vemos que $f(x) = x^{1/3}$ es una función continua de x, por lo tanto es claro que la condición de continuidad de $f(t,x)$ en sus argumentos no es suficiente para asegurar unicidad de la solución, aunque esta condición asegura la existencia de al menos una solución. En el Teorema 2.2.1 vamos a utilizar una condición que garantiza a la vez ambas propiedades.

Teorema 2.2.1 (Existencia local y unicidad). Sea $f(t,x)$ seccionalmente continua en t y supongamos que satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x-y\| \tag{2.2}$$

$\forall x, y \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que (2.1) tiene una solución única en $[t_0, t_0+\delta]$.

Demostración. Notar que si $x(t)$ es una solución de (2.1) entonces, integrando, tenemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \tag{2.3}$$

Es decir, $x(t)$ satisface (2.1) síí satisface (2.3), por lo que el estudio de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (2.1) es equivalente al estudio de existencia y unicidad de la solución de la ecuación integral (2.3). Vamos a considerar el lado derecho de (2.3) como un mapa de la función continua $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$; denotándolo como $(Px)(t)$, podemos re-escribir (2.3) como

$$x(t) = (Px)(t) \tag{2.4}$$

Notar que $(Px)(t)$ es continua en x. Una solución de (2.4) es un punto fijo del mapa P que lleva x a Px. La existencia de un *punto fijo* de (2.4) se puede probar usando el *teorema del mapa contractivo*. Para eso necesitamos definir un espacio de Banach $\mathcal{X}$ y un conjunto cerrado $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ tal que P mapee $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$ y sea una contracción en $\mathcal{S}$. Definamos

$$\mathcal{X} = C[t_0, t_0+\delta]\,, \quad \text{con norma} \quad \|x\|_C = \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \|x(t)\|$$

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x - x_0\|_C \leq r\}$$

donde r es el radio de la bola B_r y δ es una constante positiva a elegir. Nos vamos a restringir a elegir δ tal que satisfaga $\delta \leq t_1 - t_0$ de forma que $[t_0, t_0+\delta] \subset [t_0, t_1]$. Notar que $\|x(t)\|$ denota una norma en $\mathbb{R}^n$ mientras que $\|x\|_C$ denota una norma en $\mathcal{X}$; de la misma forma B_r es una bola en $\mathbb{R}^n$ mientras que $\mathcal{S}$ es una bola en $\mathcal{X}$. Por definición, P mapea $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$. Para probar que mapea $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$ escribimos

$$(Px)(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s)) - f(s,x_0) + f(s,x_0)]\,ds$$

Como f es seccionalmente continua, sabemos que $f(t, x_0)$ es acotada en $[t_0, t_1]$. Sea

$$h = \max_{t\in[t_0,t_1]} \|f(t,x_0)\|$$

Usando la condición Lipschitz (2.2) y el hecho de que para cada $x \in \mathcal{S}$

$$\|x(t) - x_0\| \leq r\,, \forall t \in [t_0, t_0+\delta]$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^{t} [\|f(s,x(s)) - f(s,x_0)\| + \|f(s,x_0)\|]\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} [L\|x(s) - x_0\| + h]\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (Lr + h)\,ds \\
&= (t - t_0)(Lr + h) \\
&\leq \delta(Lr + h)
\end{aligned}$$

y también

$$\|Px - x_0\|_C = \max_{t\in[t_0,t_0+\delta]} \|(Px)(t) - x_0\| \le \delta(Lr+h)$$

Por lo tanto, tomando $\delta \le r/(Lr+h)$ aseguramos que P mapee $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.

Ahora vamos a probar que P es una contracción en $\mathcal{S}$. Sean x e $y \in \mathcal{S}$ y consideremos

$$\begin{aligned}
\|(Px)(t) - (Py)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s)) - f(s,y(s))]\, ds \right\| \\
&\le \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|\, ds \\
&\le \int_{t_0}^{t} L\|x(s) - y(s)\|\, ds \\
&\le (t-t_0)\, L\, \|x-y\|_C
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|Px - Py\|_C \le L\delta\|x-y\|_C \le \rho\|x-y\|_C \text{ con } \delta \le \frac{\rho}{L}$$

Eligiendo $\rho < 1$ y $\delta \le \rho/L$ aseguramos que P es un mapa de contracción en $\mathcal{S}$. Por el teorema del mapa contractivo, si

$$\delta \le \min\left\{ t_1 - t_0, \frac{r}{Lr+h}, \frac{\rho}{L} \right\}, \quad \rho < 1 \tag{2.5}$$

entonces (2.3) tiene una única solución en $\mathcal{S}$. Nos falta probar que la solución es única en $\mathcal{X}$. Para eso vamos a probar que toda solución de (2.3) en $\mathcal{X}$ tiene que estar en $\mathcal{S}$. Notemos primero que, como $x(t_0) = x_0$ está en la bola B_r, toda solución continua $x(t)$ debe permanecer en B_r durante algún tiempo. Supongamos que $x(t)$ deja la bola B_r y sea $t_0 + \mu$ el primer instante en que $x(t)$ intersecta la frontera de B_r. Entonces

$$\|x(t_0+\mu) - x_0\| = r$$

Por otro lado, para todo $t \le t_0 + \mu$,

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_0\| &\le \int_{t_0}^{t} [\|f(s,x(s)) - f(s,x_0)\| + \|f(s,x_0)\|]\, ds \\
&\le \int_{t_0}^{t} [L\|x(s) - x_0\| + h]\, ds \\
&\le \int_{t_0}^{t} (Lr+h)\, ds
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r = \|x(t_0+\mu) - x_0\| \le (Lr+h)\,\mu \implies \mu \ge \frac{r}{Lr+h} \ge \delta$$

lo que significa que $x(t)$ no puede dejar B_r durante el intervalo $[t_0, t_0+\delta]$, es decir, toda solución en $\mathcal{X}$ debe estar en $\mathcal{S}$. En consecuencia, unicidad de la solución en $\mathcal{S}$ implica unicidad de la solución en $\mathcal{X}$. $\square$

Una función que satisface (2.2) se dice Lipschitz en x y L es la constante de Lipschitz. Decimos que $f(x)$ es *localmente Lipschitz* en un dominio (conjunto abierto y conexo) $D \subset \mathbb{R}^n$ si cada punto de D tiene un entorno D_0 tal que f satisface (2.2) con alguna constante de Lipschitz L_0. Decimos que $f(x)$ es Lipschitz en un conjunto W si satisface (2.2) en todos los puntos de W, con la misma constante de Lipschitz L. Toda función localmente Lipschitz en un dominio D es Lipschitz en todo subconjunto *compacto* (cerrado y acotado) de D. Decimos que $f(x)$ es globalmente Lipschitz si es Lipschitz en $\mathbb{R}^n$.

Decimos que $f(t,x)$ es *localmente Lipschitz en* x en $[a,b] \times D \subset R \times \mathbb{R}^n$ si cada punto $x \in D$ tiene un entorno D_0 tal que f satisface (2.2) en $[a,b] \times D_0$ con alguna constante de Lipschitz L_0. Decimos que $f(t,x)$ es localmente Lipschitz en x en $[t_0,\infty) \times D$ si es localmente Lipschitz en x en $[a,b] \times D$ para todo intervalo compacto $[a,b] \subset [t_0,\infty)$. Decimos que $f(t,x)$ es Lipschitz en $[a,b] \times W$ si satisface (2.2) para todo $t \in [a,b]$ y todo punto en W, con la misma constante de Lipschitz L.

Para funciones escalares, la condición de Lipschitz se puede escribir como

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L$$

lo que implica que la pendiente está siempre acotada por L, es decir toda función $f(x)$ que tenga pendiente infinita en un punto no puede ser localmente Lipschitz en ese punto. Por otro lado, si el valor absoluto de la derivada f' está acotado por una constante k sobre un intervalo de interés, entonces f es Lipschitz en ese intervalo con constante de Lipschitz $L = k$. Lo mismo vale para funciones vectoriales, como lo probamos en el siguiente Lema.

Lema 2.2.2 (La cota de la derivada es la constante de Lipschitz). Sea $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^m$ una función continua, D un dominio en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\partial f / \partial x$ existe y es continua en $[a,b] \times D$. Si, para algún subconjunto convexo $W \subset D$ existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \leq L$$

en $[a,b] \times W$, entonces

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \,\|x - y\|$$

$\forall t \in [a,b]$, $x \in W$, $y \in W$.

Demostración. Sea $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty]$ la norma utilizada, y calculemos $q \in [1,\infty]$ mediante la relación $1/p + 1/q = 1$. Fijamos $t \in [a,b]$, $x \in W$ e $y \in W$. Definamos $\gamma(s) = (1-s)\,x + s\,y$ para todo $s \in R$ tal que $\gamma(s) \in D$. Como $W \subset D$ es convexo, $\gamma(s) \in W$ para $0 \leq s \leq 1$. Tomemos $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|z\|_q = 1 \quad \text{y} \quad z^{\mathrm{T}}[f(t,y) - f(t,x)] = \|f(t,y) - f(t,x)\|_p$$

Definamos $g(s) = z^{\mathrm{T}} f(t, \gamma(s))$. Como $g(s)$ es una función a valores reales continuamente diferenciable en un intervalo abierto que contenga al $[0,1]$, concluimos mediante el teorema del valor medio que existe $s_1 \in (0,1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(s_1)$$

Evaluando g en $s = 0$, $s = 1$, y calculando $g'(s)$ usando la regla de la cadena, obtenemos

$$z^{\mathrm{T}}[f(t,y) - f(t,x)] = z^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(s_1))(y-x)$$
$$\|f(t,y) - f(t,x)\|_p \leq \|z\|_q \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\gamma(s_1))\right\|_p \|y-x\|_p \leq L\|y-x\|_p$$

donde usamos la desigualdad de Hölder $|z^{\mathrm{T}} w| \leq \|z\|_q \|w\|_p$. □

La propiedad de "Lipschitzidad" es más fuerte que la de continuidad. Si $f(x)$ es Lipschitz en W, entonces es uniformemente continua en W. La propiedad de Lipschitzidad es más débil que la de poseer derivada continua, como vemos en el siguiente Lema.

Lema 2.2.3 (C^1 implica Lipschitz). Sea $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^m$ una función continua, D un dominio en $\mathbb{R}^n$. Si $\partial f/\partial x$ existe y es continua en $[a,b] \times D$ entonces f es localmente Lipschitz en x en $[a,b] \times D$.

Demostración. Dado $x_0 \in D$, sea r tan pequeño que la bola $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ esté contenida en D. El conjunto D_0 es convexo y compacto. Por continuidad, $\partial f/\partial x$ está acotada en $[a,b] \times D$. Sea L_0 una cota para $\partial f/\partial x$ en $[a,b] \times D$. Por el Lema 2.2.2, f es Lipschitz en $[a,b] \times D$ con constante de Lipschitz L_0. □

Lema 2.2.4 (Condiciones para Lipschitz global). Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n$ una función continua. Si $\partial f/\partial x$ existe y es continua en $[a,b] \times \mathbb{R}^n$, entonces f es globalmente Lipschitz en x en $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ síí $\partial f/\partial x$ está uniformemente acotada en $[a,b] \times \mathbb{R}^n$. ∘

Ejemplo 2.2.1. La función

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1x_2 \\ x_2 - x_1x_2 \end{bmatrix}$$

es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^2$. No es globalmente Lipschitz porque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

no es uniformemente acotada en $\mathbb{R}^2$. En cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, f es Lipschitz. Supongamos que queremos calcular una constante de Lipschitz sobre el conjunto convexo

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq a_1,\ |x_2| \leq a_2\}$$

Usando en (2.6) $\|\cdot\|_\infty$ para vectores en $\mathbb{R}^2$ y la norma matricial inducida para matrices, tenemos

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_\infty = \text{máx}\{|-1 + x_2| + |x_1|\,, |x_2| + |1 - x_1|\}$$

Todo punto en W satisface

$$|-1 + x_2| + |x_1| \leq 1 + a_2 + a_1$$
$$|x_2| + |1 - x_1| \leq a_2 + 1 + a_1$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_\infty \leq 1 + a_2 + a_1$$

y una constante de Lipschitz es entonces $L = 1 + a_2 + a_1$. ○

Notar que la elección de la norma en $\mathbb{R}^n$ no afecta la propiedad de Lipschitzidad de una función pero si el valor de la constante de Lipschitz.

Teorema 2.2.1 es un resultado local porque sólo garantiza existencia y unicidad sobre un intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$, y no tenemos control sobre δ; por lo tanto no podemos asegurar existencia y unicidad sobre un intervalo dado $[t_0, t_1]$. Se puede tratar de extender el intervalo de existencia mediante la aplicación repetida del teorema: usar $t_0 + \delta$ como el nuevo instante inicial y $x(t_0 + \delta)$ como el nuevo estado inicial, y así sucesivamente. Sin embargo, en general, el intervalo de existencia de la solución no puede extenderse indefinidamente porque las condiciones del teorema pueden dejar de valer. Hay un intervalo máximo $[t_0, T)$ donde la única solución que comienza en (t_0, x_0) existe. En general, T puede ser menor que t_1, en cuyo caso, cuando $t \to T$ la solución deja cualquier conjunto compacto sobre el cual f es localmente Lipschitz en x.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^2, \qquad x(0) = -1$$

La función $f(x) = -x^2$ es localmente Lipschitz para todo $x \in R$. Por lo tanto, es Lipschitz en todo subconjunto compacto de R. La solución única

$$x(t) = \frac{1}{t-1}$$

existe sobre $[0, 1)$. Cuando $t \to 1$, $x(t)$ deja cualquier conjunto compacto. ○

Una forma de garantizar que la solución pueda extenderse indefinidamente, es la de requerir condiciones adicionales que aseguren que la solución $x(t)$ siempre esté en un conjunto donde $f(t, x)$ es uniformemente Lipschitz en x. Esto lo hacemos en el siguiente teorema donde pedimos que f sea globalmente Lipschitz.

Teorema 2.2.5 (Existencia global y unicidad). Supongamos que $f(t, x)$ es seccionalmente continua en t y satisface

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,y)\| &\leq L\|x - y\| \\ \|f(t,x_0)\| &\leq h \end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces, la ecuación (2.1) tiene una solución única en $[t_0, t_1]$.

Demostración. La clave de la prueba es mostrar que la constante δ del Teorema 2.2.1 se puede hacer independiente del estado inicial x_0. Vemos en (2.5) que la dependencia de δ del estado inicial es a través de la constante h en el término $r/(Lr + h)$. Como ahora la condición de Lipschitz es global, podemos elegir r arbitrariamente grande. Por lo tanto, para cada h finito, elegimos r tal que $r/(Lr + h) > \rho/L$. Esto reduce (2.5) a

$$\delta \leq \text{mín}\left\{t_1 - t_0, \frac{\rho}{L}\right\}, \quad \rho < 1$$

Si $t_1 - t_0 \leq \rho/L$, podemos elegir $\delta = t_1 - t_0$ y probamos el resultado. De lo contrario, elegimos δ que satisfaga $\delta \leq \rho/L$, dividimos $[t_0, t_1]$ en un número finito de subintervalos de longitud δ y aplicamos repetidamente el Teorema 2.2.1. □

Ejemplo 2.2.3. Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) = f(t, x)$$

donde $A(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son seccionalmente continuas. Sobre un intervalo finito $[t_0, t_1]$, los elementos de $A(t)$ y $g(t)$ son acotados, es decir $\|A(t)\| \leq a$, y $\|g(t)\| \leq b$, donde $\|g\|$ puede ser cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ y $\|A\|$ es la norma matricial inducida. Las condiciones del Teorema 2.2.5 se satisfacen porque

$$\begin{aligned}\|f(t,x) - f(t,y)\| &= \|A(t)\,(x-y)\| \\ &\leq \|A(t)\|\,\|(x-y)\| \\ &\leq a\,\|(x-y)\|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [t_0, t_1]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|f(t,x_0)\| &= \|A(t)\,x_0 + g(t)\| \\ &\leq a\,\|x_0\| + b\ \leq h\,,\text{para todo } x_0 \text{ finito}\,, \forall t \in [t_0, t_1]\end{aligned}$$

Por lo tanto, el Teorema 2.2.5 muestra que el sistema lineal tiene solución única en $[t_0, t_1]$. Como t_1 puede ser arbitrariamente grande, concluimos que si $A(t)$ y $g(t)$ son seccionalmente continuas $\forall t \geq t_0$, entonces el sistema tiene una solución única $\forall t \geq t_0$. ∘

Para un sistema lineal es razonable pedir Lipschitzidad global. Pero para sistemas no lineales esto es muy restrictivo. No así la condición de Lipschitz local, que está garantizada si la función del lado derecho es continuamente diferenciable.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3 = f(x) \tag{2.7}$$

La función $f(x)$ no satisface la condición de Lipschitz global porque el Jacobiano $\partial f/\partial x = -3x^2$ no está globalmente acotado. Sin embargo, la ecuación tiene la única solución

$$x(t) = \operatorname{sign} x_0 \sqrt{\frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}}$$

que está bien definida para todo x_0 y para todo $t \geq t_0$. ∘

Como la condición de Lipschitz global es muy conservadora, es útil disponer de otro resultado que, a expensas de pedir un mayor conocimiento acerca de la solución del sistema, sólo requiera que la función sea localmente Lipschitz.

Teorema 2.2.6 (Existencia global y unicidad de vuelta). Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x para todo $t \geq t_0$ y todo x en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea W un subconjunto compacto de D, $x_0 \in W$, y supongamos que se sabe que toda solución de (2.1) permanece todo el tiempo en W. Entonces existe una solución única que está definida para todo $t \geq t_0$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.1, existe una solución local única en $[t_0, t_0 + \delta]$. Sea $[t_0, T)$ el máximo intervalo de existencia. Si T es finito, entonces la solución debe abandonar todo subconjunto compacto de D (Ejercicio 2.33). Como la solución nunca deja el conjunto compacto W, concluimos que debe ser $T = \infty$. □

El truco al aplicar el Teorema 2.2.6 es verificar que toda solución permanezca en un conjunto compacto sin resolver la ecuación diferencial. Vamos a ver en el Capítulo 3 que el método de Lyapunov va a ser útil para esto.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos nuevamente el sistema (2.7). La función $f(x)$ es localmente Lipschitz en R. Si en algún instante $x(t)$ es positiva, la derivada $\dot{x}(t)$ va a ser negativa, y viceversa. Por lo tanto, comenzando con una condición inicial $x(0) = a$, la solución no puede dejar el conjunto compacto $\{x \in R \mid |x| \leq |a|\}$, y el Teorema 2.2.6 garantiza que (2.7) tiene una solución única para todo $t \geq t_0$. $\circ$

2.3. Dependencia Continua Con Respecto a Condiciones Iniciales y Parámetros

Para que la solución de la ecuación de estado (2.1) sea de algún interés, debe depender continuamente del instante inicial t_0, del estado inicial x_0, y de la función del lado derecho $f(t,x)$. La forma integral (2.3) muestra que la dependencia continua del instante inicial es obvia.

Por dependencia continua de la condición inicial entendemos lo siguiente: sea $y(t)$ la solución de (2.1) que comienza en $y(t_0) = y_0$ y está definida en el intervalo compacto $[t_0, t_1]$; dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo z_0 en la bola $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$ tiene una solución única $z(t)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$, y satisface $\|z(t) - y(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Para definir dependencia continua de la función del lado derecho f, vamos a precisar en que forma f es perturbada. Vamos a asumir que f depende continuamente de un conjunto de parámetros constantes, es decir, $f = f(t,x,\lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Sea $x(t,\lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t,x,\lambda_0)$ definida en $[t_0,t_1]$, con $x(t_0,\lambda_0) = x_0$. Se dice que la solución depende continuamente de λ si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo λ en la bola $\{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t,x,\lambda)$ tiene una solución única $x(t,\lambda)$ definida en $[t_0,t_1]$, con $x(t_0,\lambda) = x_0$, y satisface $\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0,t_1]$.

Antes de estudiar los dos tipos de continuidad recién definidos, necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. Sea $f(t,x)$ seccionalmente continua en t y Lipschitz en x en $[t_0,t_1] \times W$, con constante de Lipschitz L, donde $W \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Sean $y(t)$ y $z(t)$ soluciones de

$$\dot{y} = f(t,y)\,, \quad y(t_0) = y_0$$

y

$$\dot{z} = f(t,z) + g(t,z)\,, \quad z(t_0) = z_0$$

tal que $y(t), z(t) \in W$ para todo $t \in [t_0,t_1]$. Supongamos que

$$\|g(t,x)\| \leq \mu\,, \quad \forall (t,x) \in [t_0,t_1] \times W\,,$$

para algún $\mu > 0$, y

$$\|y_0 - z_0\| \leq \gamma$$

Entonces

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L}[e^{L(t-t_0)} - 1] \tag{2.8}$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Demostración. Las soluciones $y(t)$ y $z(t)$ están dadas por

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \\ z(t) &= z_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, z(s)) + g(s, z(s))]\, ds \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones y tomando normas obtenemos

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds + \int_{t_0}^{t} \|g(s, z(s))\|\, ds \\ &\leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L\|y(s) - z(s)\|\, ds \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman a la función $\|y(t) - z(t)\|$ resulta

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} L[\gamma + \mu(s - t_0)]e^{L(s-t_0)}\, ds$$

Integrando el lado derecho por partes se obtiene (2.8). □

Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2 (Continuidad en condiciones iniciales y parámetros). Sea $f(t, x, \lambda)$ continua en sus argumentos y localmente Lipschitz en x (uniformemente en t y λ) en $[t_0, t_1] \times D \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Sea $y(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ con $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$. Supongamos que $y(t, \lambda_0)$ está definida y permanece en D para todo $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|y_0 - z_0\| < \delta \text{ y } \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una solución única $z(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0, \lambda) = z_0$, y satisface

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Demostración. Por continuidad de $y(t, \lambda_0)$ en t y la compacidad de $[t_0, t_1]$, sabemos que $y(t, \lambda_0)$ está uniformemente acotada en $[t_0, t_1]$. Definamos un "tubo" U alrededor de la solución $y(t, \lambda_0)$ de la siguiente manera

$$U = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \mid \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \epsilon\},$$

como se ilustra en la Figura 2.1.

Supongamos que ϵ se eligió lo suficientemente pequeño para que $U \subset [t_0, t_1] \times D$. El conjunto U es compacto; por lo tanto $f(t, x, \lambda)$ es Lipschitz en x en U con constante de

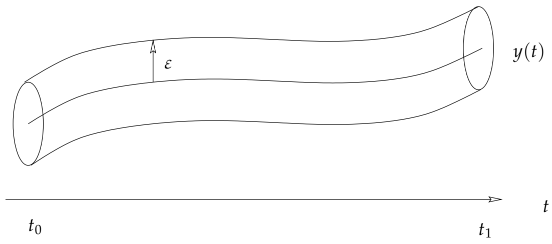

Figura 2.1: Tubo construido alrededor de la solución $y(t)$

Lipschitz L, digamos. Por continuidad de f en λ, para cada $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ (con $\beta < c$) tal que

$$\|f(t,x,\lambda) - f(t,x,\lambda_0)\| < \alpha\,, \quad \forall (t,x) \in U\,, \quad \forall \|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$

Tomemos $\alpha < \epsilon$ y $\|y_0 - z_0\| < \alpha$. Por el teorema de existencia local y unicidad, existe una solución única $z(t,\lambda)$ en algún intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$. La solución comienza dentro del tubo U y mientras permanezca en el tubo puede extenderse. Vamos a mostrar que, eligiendo α lo suficientemente pequeño, la solución permanece en el tubo U para todo $t \in [t_0, t_1]$. En particular, sea τ el primer instante en que la solución deja el tubo; vamos a probar que $\tau > t_1$. En el intervalo $[t_0, \tau]$, todas las condiciones del Teorema 2.3.1 son satisfechas con $\gamma = \mu = \alpha$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| &\leq \alpha e^{L(t-t_0)} + \frac{\alpha}{L}[e^{L(t-t_0)} - 1] \\ &< \frac{\alpha(1+L)}{L} e^{L(t-t_0)} \end{aligned}$$

Si elegimos $\alpha \leq \epsilon L e^{-L(t_1-t_0)}/(1+L)$ aseguramos que la solución $z(t,\lambda)$ no deja el tubo durante $[t_0, t_1]$. Por lo tanto $z(t,\lambda)$ está definida en $[t_0, t_1]$ y satisface $\|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| < \epsilon$. La prueba se completa tomando $\delta = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$. $\square$

2.4. Diferenciabilidad de la Solución y Ecuaciones de Sensibilidad

Supongamos que $f(t,x,\lambda)$ es continua en sus argumentos y tiene derivadas parciales continuas con respecto a x y λ para todo $(t,x,\lambda) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Sea λ_0 un valor nominal de λ y supongamos que la ecuación de estado nominal

$$\dot{x} = f(t,x,\lambda_0)\,, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.9}$$

tiene una solución única $x(t,\lambda_0)$ en $[t_0, t_1]$. Por el Teorema 2.3.2 sabemos que para todo λ suficientemente cercano a λ_0, la ecuación de estado

$$\dot{x} = f(t,x,\lambda)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una solución única $x(t,\lambda)$ en $[t_0, t_1]$ que es cercana a la solución nominal $x(t,\lambda_0)$. Escribamos esta solución como

$$x(t,\lambda) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,\lambda), \lambda)\, ds$$

y derivemos parcialmente con respecto a λ

$$x_\lambda(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s,\lambda), \lambda)\, x_\lambda(s,\lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s,\lambda), \lambda) \right] ds$$

donde $x_\lambda(t,\lambda) = \partial x(t,\lambda)/\partial\lambda$ y $\partial x_0/\partial\lambda = 0$ porque x_0 es independiente de λ. Derivando ahora con respecto a t obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} x_\lambda(t,\lambda) = A(t,\lambda) x_\lambda(t,\lambda) + B(t,\lambda)\,, \quad x_\lambda(t_0,\lambda) = 0 \tag{2.10}$$

donde

$$A(t,\lambda) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x}\right|_{x=x(t,\lambda)}, \quad B(t,\lambda) = \left.\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x(t,\lambda)}$$

Para λ suficientemente cercano a λ_0 las matrices $A(t,\lambda)$ y $B(t,\lambda)$ están definidas en $[t_0, t_1]$, por lo tanto $x_\lambda(t,\lambda)$ está definida en el mismo intervalo. Para $\lambda = \lambda_0$, el lado derecho de (2.10) depende sólo de la solución nominal $x(t,\lambda_0)$. Sea $S(t) = x_\lambda(t,\lambda_0)$; $S(t)$ es la solución única de

$$\dot{S}(t) = A(t,\lambda_0) S(t) + B(t,\lambda_0)\,, \quad S(t_0) = 0 \tag{2.11}$$

La función $S(t)$ se denomina *función de sensibilidad* y (2.11) es la *ecuación de sensibilidad*. Las funciones de sensibilidad proporcionan estimas de primer orden del efecto de variaciones de los parámetros en las soluciones; también sirven para aproximar la solución cuando $\|\lambda - \lambda_0\|$ es suficientemente pequeño: $x(t,\lambda)$ puede expandirse en serie de Taylor alrededor de la solución nominal $x(t,\lambda_0)$ y, despreciando términos de orden superior, se obtiene

$$x(t,\lambda) \approx x(t,\lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) \tag{2.12}$$

Una forma de calcular $S(t)$ es resolver (en general numéricamente) simultáneamente (2.9) y (2.10) y luego evaluar la solución de (2.10) en $\lambda = \lambda_0$.

2.5. Principio de Comparación

Como la desigualdad de Gronwall-Bellman, el principio de comparación sirve para obtener cotas de la solución de (2.1) sin necesidad de calcular la solución misma. Se aplica a *desigualdades diferenciales* de la forma $\dot{v} \leq f(t, v(t))$ para todo t en un cierto intervalo. El principio de comparación compara la solución de la desigualdad diferencial $\dot{x} \leq f(t, v(t))$ con la de la ecuación diferencial $\dot{u} = f(t,u)$.

Lema 2.5.1 (Principio de Comparación). Consideremos la ecuación diferencial escalar

$$\dot{u} = f(t,u)\,, \quad u(t_0) = u_0$$

donde $f(t,u)$ es continua en t y localmente Lipschitz en u, para todo $t \geq 0$ y todo $u \in J \subset R$. Sea $[t_0, T)$ (T puede ser infinito) el máximo intervalo de existencia de la solución $u(t)$ y supongamos que $u(t) \in J$ para todo $t \in [t_0, T)$. Sea $v(t)$ una función diferenciable que satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))\,, \quad v(t_0) \leq u_0$$

con $v(t) \in J$ para todo $t \in [t_0, T)$. Entonces

$$v(t) \leq u(t)$$

para todo $t \in [t_0, T)$. ∘

Ejemplo 2.5.1. La ecuación diferencial escalar

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)\, x\,, \quad x(0) = a$$

tiene una solución única en $[0, t_1]$ para algún $t_1 > 0$, porque $f(x)$ es localmente Lipschitz. Sea $v(t) = [x(t)]^2$. Su derivada es

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2[x(t)]^2 - 2[x(t)]^4 \leq -2[x(t)]^2$$

Por lo tanto $v(t)$ satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t)\,, \quad v(0) = a^2$$

Sea $u(t)$ la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{u} = -2u\,, \quad u(0) = a^2 \quad \Longrightarrow \quad u(t) = a^2 e^{-2t}$$

Por el principio de comparación la solución $x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y satisface

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \leq |a| e^{-t}\,, \quad \forall t \geq 0$$

$\circ$

Bibliografía

Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.

Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.

Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.

Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.

Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.

Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.

Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.

Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.

Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.

van der Schaft, A. J. (2000). *L_2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.

Índice alfabético