

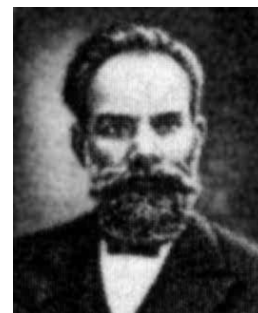
## Capítulo 3

# Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Estacionarios

La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad. En este capítulo vamos a tratar estabilidad de puntos de equilibrio; más adelante en el curso veremos otros problemas de estabilidad, como el de estabilidad *entrada-salida*.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza *en el sentido de Lyapunov*, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es *inestable*. Un punto de equilibrio se dice *asintóticamente estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito. Vemos estas nociones en más detalle en §3.1, donde presentamos también los teoremas básicos de Lyapunov para sistemas estacionarios. En §3.2 damos una extensión de la teoría básica de Lyapunov que se debe a LaSalle. En §3.3 analizamos *región de atracción* de un punto de equilibrio, y en §3.4 vemos cómo la estabilidad de un punto de equilibrio puede determinarse mediante linealización.

Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio. Existen teoremas *conversos* que establecen que, al menos conceptualmente, en los teoremas de Lyapunov muchas de estas condiciones son también necesarias. Trataremos estos teoremas conversos en el capítulo siguiente, junto a extensiones de los resultados para sistemas inestacionarios.



Aleksandr Lyapunov  
1857-1918

### 3.1. El Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa localmente Lipschitz desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $\bar{x} \in D$  es un PE de (3.1), es decir  $f(\bar{x}) = 0$ . Vamos a caracterizar y estudiar

la estabilidad de  $\bar{x}$ . Por conveniencia, vamos a asumir que  $\bar{x} = 0$  (esto no nos hace perder generalidad porque, si no es así, definimos  $y = x - \bar{x}$  y trabajamos con la ecuación  $\dot{y} = g(y)$ , donde  $g(y) \triangleq f(y + \bar{x})$ , que tiene un equilibrio en el origen.)

**Definición 3.1.** El PE  $x = 0$  de (3.1) es

- *estable*, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *inestable* si no es estable.
- *asintóticamente estable* (AE) si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Los tres tipos de estabilidad se pueden ver en la ecuación del péndulo (1.4) del Ejemplo 1.2.1. Los PE son  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$ . Considerando que no hay fricción, o sea tomando  $k = 0$ , las trayectorias en el entorno del primer PE son órbitas cerradas. Empezando suficientemente cerca del PE se puede garantizar que las trayectorias van a permanecer en cualquier bola pre-especificada alrededor del PE. Por lo tanto, el PE es estable. No es AE, sin embargo, porque las trayectorias que comienzan fuera del PE nunca tienden a él.

Si consideramos fricción ( $k > 0$ ), el PE en el origen es un foco estable. La inspección del retrato de fase de un foco estable muestra que el requisito  $\epsilon - \delta$  para estabilidad se satisface; más aún, las trayectorias que comienzan cerca del PE tienden a él cuando  $t$  tiende a  $\infty$ . El segundo PE en  $(\pi, 0)$  es un punto de ensilladura. Es obvio que el requisito  $\epsilon - \delta$  para estabilidad no se satisface porque, para cualquier  $\epsilon > 0$ , siempre hay una trayectoria que deja la bola  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$ , aún cuando  $x(0)$  sea arbitrariamente cercano al PE.

La Definición 3.1 tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo  $t \geq 0$ . Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada, como ya vimos, por la Lipschitzidad local de  $f$ . Vamos a ver, sin embargo, que las condiciones adicionales que requiere el Teorema de Lyapunov van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos. Vamos a ver que las conclusiones a las que llegamos analizando el retrato de fase del péndulo se pueden obtener también usando conceptos de energía. Definamos la energía del péndulo  $E(x)$  como la suma de sus energías cinética y potencial, con referencia de energía potencial elegida tal que  $E(0) = 0$ , es decir,

$$E(x) = \int_0^{x_1} (g/l) \sin y \, dy + \frac{1}{2}x_2^2 = (g/l)(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (3.2)$$

Cuando no hay fricción ( $k = 0$ ), el sistema es conservativo, es decir, no hay disipación de energía. Por lo tanto,  $E = \text{constante}$  durante la evolución del sistema, o sea,  $dE/dt = 0$  sobre las trayectorias del sistema. Como  $E(x) = c$  forma contornos cerrados alrededor de  $x = 0$  para  $c$  pequeño, concluimos que  $x = 0$  es un PE estable. Cuando consideramos fricción ( $k > 0$ ), se disipa energía durante la evolución del sistema, o sea,  $dE/dt \leq 0$  sobre las

trayectorias del sistema. Es decir que la energía decrece hasta que llega a cero, mostrando que la trayectoria tiende a  $x = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En 1892, Lyapunov mostró que algunas otras funciones, no sólo la energía, pueden usarse para determinar la estabilidad de un PE. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene el origen. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (3.1) está dada por

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

**Teorema 3.1 (Lyapunov).** Sea el origen  $x = 0$  un PE de (3.1) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \tag{3.3}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \tag{3.4}$$

Entonces  $x = 0$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \tag{3.5}$$

entonces  $x = 0$  es AE.

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , elijamos  $r \in (0, \epsilon]$  tal que

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D$$

Sea  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Entonces  $\alpha > 0$  por (3.3). Tomemos  $\beta \in (0, \alpha)$  y sea

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$$

Entonces  $\Omega_\beta$  está en el interior de  $B_r$ ;<sup>1</sup> ver la Figura 3.1. El conjunto  $\Omega_\beta$  tiene la propiedad

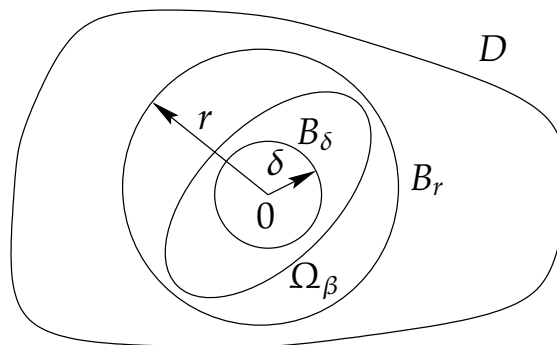


Figura 3.1: Representación geométrica de los conjuntos en la prueba del Teorema 3.1

<sup>1</sup>Si no fuera así, existiría un punto  $p \in \Omega_\beta$  que se encuentra sobre la frontera de  $B_r$ . En este punto,  $V(p) \geq \alpha > \beta$ , pero para todo  $x \in \Omega_\beta$ ,  $V(x) \leq \beta$ , lo cual es una contradicción.

de que toda trayectoria que comienza en  $\Omega_\beta$  en  $t = 0$  permanece en  $\Omega_\beta$  para todo  $t \geq 0$ . Esto sigue de (3.4) ya que

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \implies V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0$$

Como  $\Omega_\beta$  es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en  $B_r$ ), concluimos por el Teorema 2.9 que (3.1) tiene una solución única definida para todo  $t \geq 0$  cuando  $x(0) \in \Omega_\beta$ . Como  $V$  es continua y  $V(0) = 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| \leq \delta \implies V(x) < \beta$$

Entonces

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

y

$$x(0) \in B_\delta \implies x(0) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in B_r, \quad \forall t \geq 0$$

Por lo tanto

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

lo que muestra que el PE en  $x = 0$  es estable.

Supongamos ahora que (3.5) también vale. Para mostrar EA debemos probar que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V$  es continua y  $V(0) = 0$ , es suficiente mostrar que  $V(x(t)) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V(x(t))$  es monótonicamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Mostramos que  $c = 0$  por contradicción. Supongamos que  $c > 0$ . Por continuidad de  $V(x)$ , existe  $d > 0$  tal que  $B_d \subset \Omega_c$ . El límite  $V(x(t)) \rightarrow c > 0$  implica que la trayectoria  $x(t)$  permanece fuera de la bola  $B_d$  para todo  $t \geq 0$ . Sea  $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ , el cual existe porque la función continua  $\dot{V}(x)$  alcanza un máximo sobre el conjunto compacto  $\{d \leq \|x\| \leq r\}$ . Sabemos que  $-\gamma < 0$  por (3.5). Integrando  $\dot{V}(x)$  tenemos que

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Como el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que  $c > 0$ .  $\square$

Una función continuamente diferenciable que satisface (3.3) y (3.4) se denomina *función de Lyapunov*. La superficie  $V(x) = c$  se denomina *superficie de Lyapunov* o *superficie de nivel*. Usando superficies de Lyapunov, la Figura 3.2 da una interpretación intuitiva del Teorema 3.1. La condición  $\dot{V} \leq 0$  implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se introduce en el conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  y nunca puede salir de él. Cuando  $\dot{V} < 0$ , la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un  $c$  menor. A medida que  $c$  decrece, la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si sólo sabemos que  $\dot{V} \leq 0$ , no podemos asegurar que

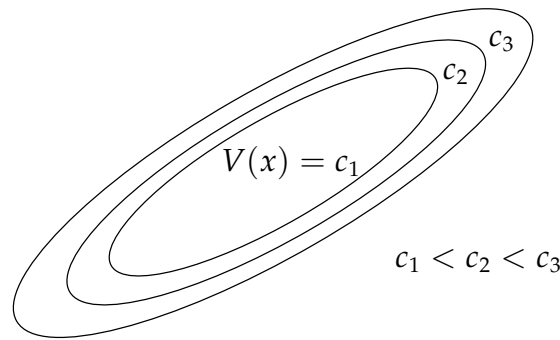


Figura 3.2: Curvas de nivel de una función de Lyapunov

la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola  $B_\epsilon$  sólo con requerir que el estado inicial  $x(0)$  pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función  $V(x)$  que satisface (3.3) se dice *definida positiva*. Si satisface la condición más débil  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$ , se dice *semidefinida positiva*. Una función se dice *definida negativa* o *semidefinida negativa* si  $-V(x)$  es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Si  $V(x)$  no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice *indefinida*. El teorema de Lyapunov se puede enunciar, usando esta nueva terminología como: *el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa, y es AE si  $\dot{V}(x)$  es definida negativa*.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $V$  la forma cuadrática

$$V(x) = x^T P x$$

donde  $P$  es una matriz real y simétrica.  $V(x)$  es (semi)definida positiva sí todos los autovalores de  $P$  son (no negativos) positivos, lo que vale sí todos los menores principales de  $P$  son (no negativos) positivos. Si  $V(x) = x^T P x$  es (semi)definida positiva, decimos que la matriz  $P$  es (semi)definida positiva y escribimos  $(P \geq 0)$   $P > 0$ .

Por ejemplo, si

$$P = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

entonces  $V(x)$  es positiva definida si  $a > \sqrt{5}$  y definida negativa si  $a < -\sqrt{5}$ . ◦

**Ejemplo 3.2.** Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{x} = -g(x)$$

donde  $g(x)$  es localmente Lipschitz en  $(-a, a)$  y satisface

$$g(0) = 0; \quad x g(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, x \in (-a, a)$$

Este sistema tiene un PE aislado en el origen. Consideremos la función

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy$$

En el dominio  $D = (-a, a)$ ,  $V(x)$  es continuamente diferenciable,  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ , es decir, es una candidata a función de Lyapunov válida. Calculemos su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}[-g(x)] = -[g(x)]^2 < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}$$

Concluimos usando el Teorema 3.1 que el origen es AE. ◦

**Ejemplo 3.3 (Péndulo sin fricción).** Consideremos la ecuación del péndulo sin fricción (ecuación (1.4) con  $k = 0$ ) con la función de energía (3.2) como función de Lyapunov. Tenemos que  $V(0) = 0$  y  $V(x)$  es definida positiva en el dominio  $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$ . Además

$$\dot{V}(x) = (g/l)\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$$

Por lo tanto se satisfacen las condiciones (3.3) y (3.4) del Teorema 3.1 probando que el origen es estable. Como  $\dot{V}(x) \equiv 0$  podemos también concluir que el origen no es AE. ◦

**Ejemplo 3.4 (Péndulo con fricción).** Consideremos la ecuación del péndulo con fricción (ecuación (1.4) con  $k > 0$ ) con la función de energía (3.2) como función de Lyapunov. Tenemos que

$$\dot{V}(x) = (g/l)\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -(k/m)x_2^2$$

$\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa pero no es definida negativa porque se anula sobre todo el eje  $x_2 = 0$ . Por lo tanto sólo podemos concluir que el origen es estable. Sin embargo ya sabemos, analizando el retrato de fase, que en este caso el origen es AE, por lo tanto esta elección de función de Lyapunov junto con el Teorema 3.1 no son concluyentes para probar las propiedades de estabilidad del PE (vamos a ver más adelante que el Teorema de invariancia de LaSalle nos va a permitir probar AE usando la función de energía). Partiendo de la función de energía, reemplacemos el término  $(1/2)x_2^2$  por la forma cuadrática general  $(1/2)x^T P x$  y tratemos de elegir los elementos de  $P$  tal que  $V(x)$  sea una función de Lyapunov válida,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x^T P x + \left(\frac{g}{l}\right) (1 - \cos x_1) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left(\frac{g}{l}\right) (1 - \cos x_1). \end{aligned}$$

Para que la forma cuadrática  $x^T P x$  sea definida positiva los elementos de  $P$  deben satisfacer

$$p_{11} > 0; \quad p_{22} > 0; \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0.$$

La derivada  $\dot{V}(x)$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \left[ p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \left(\frac{g}{l}\right) \sin x_1 \right] x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2) \left[ -\left(\frac{g}{l}\right) \sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right) x_2 \right] \\ &= \left(\frac{g}{l}\right) (1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \left(\frac{g}{l}\right) p_{12}x_1 \sin x_1 + \left[ p_{11}x_1 - p_{12} \left(\frac{k}{m}\right) \right] x_1 x_2 \\ &\quad + \left[ p_{12}x_1 - p_{22} \left(\frac{k}{m}\right) \right] x_2^2 \end{aligned}$$

Ahora queremos elegir  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  y  $p_{22}$  para que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa. Como los términos de productos cruzados  $x_2$  en  $x_1$  y  $x_1x_2$  son de signo indefinido, los cancelamos tomando  $p_{22} = 1$  y  $p_{11} = (k/m)p_{12}$ . Con esta elección  $p_{12}$  debe satisfacer

$$0 < p_{12} < \frac{k}{m}$$

para que  $V(x)$  sea definida positiva. Una posible elección es  $p_{12} = 0,5(k/m)$ , y así

$$\dot{V}(x) = -\frac{gk}{2lm}x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}x_2^2.$$

El término  $x_1 \sin x_1 > 0$  para todo  $x_1 : 0 < |x_1| < \pi$ . Tomando  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| < \pi\}$  tenemos que  $V(x)$  es positiva definida y  $\dot{V}(x)$  es definida negativa sobre  $D$ . Por el Teorema 3.1 concluimos que el origen es AE.  $\circ$

El ejemplo anterior muestra que las condiciones del Teorema 3.1 son sólo suficientes. Si una dada candidata a función de Lyapunov no alcanza para probar que el PE es AE, esto no significa que no lo sea.

En el Ejemplo 3.4 enfocamos el problema en una forma inversa. Investigamos una expresión propuesta para  $V(x)$  y determinamos sus parámetros de forma que  $V(x)$  fuera definida positiva y  $\dot{V}(x)$  definida negativa. Esta idea es útil para buscar funciones de Lyapunov, y se aprovecha en el procedimiento siguiente.

### 3.1.1. Método del Gradiente Variable

El método del gradiente variable es un método para construir funciones de Lyapunov. Sea  $V(x)$  una función escalar de  $x$  y  $g(x) = (\partial V / \partial x)^T$ . Entonces

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$$

La idea es tratar de encontrar  $g(x)$  tal que sea el gradiente de una función definida positiva  $V(x)$  y tal que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa. Es fácil de probar que  $g(x)$  es el gradiente de una función escalar sí la matriz Jacobiana  $[\partial g / \partial x]$  es simétrica, es decir

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

Bajo esta restricción, elegimos  $g(x)$  tal que  $g^T(x) f(x)$  sea definida negativa. Luego  $V(x)$  se computa mediante la integral

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i$$

Como la integral de un gradiente no depende del camino, podemos integrar a lo largo de los ejes:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, \dots, 0) dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, y_n) dy_n$$

**Ejemplo 3.5.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2\end{aligned}$$

donde  $a > 0$ ,  $h$  es localmente Lipschitz,  $h(0) = 0$  y además  $yh(y) > 0$  para todo  $y \neq 0$ ,  $y \in (-b, c)$  para ciertas constantes positivas  $b$  y  $c$ . La ecuación del péndulo es un caso particular de este sistema. Queremos elegir un vector de dos componentes  $g(x)$  tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \dot{V}(x) &= g_1(x)x_2 - g_2(x)[h(x_1) + ax_2] < 0, \quad x \neq 0 \\ V(x) &= \int_0^x g^T(y) dy > 0, \quad x \neq 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

Probemos con

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix}\tag{3.7}$$

donde las funciones escalares  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son a determinar.

Empecemos calculando  $\dot{V}(x)$ :

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2 - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

y para cancelar los productos cruzados (que no tienen signo definido) elegimos

$$\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0\tag{3.8}$$

de forma que

$$\dot{V}(x) = -[a\delta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

Para simplificar elegimos  $\delta(x) = \delta$  constante,  $\gamma(x) = \gamma$  constante, y  $\beta(x) = \beta$  constante, por lo cual  $\alpha$  en (3.8) depende sólo de  $x_1$ . La condición de simetría (3.6) se reduce entonces a  $\beta = \gamma$ . La expresión de  $g(x)$  en (3.7) resulta

$$g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \delta h(y_1)] dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \delta y_2) dy_2 \\ &= \frac{1}{2}a\gamma x_1^2 + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy + \gamma x_1 x_2 + \frac{1}{2}\delta x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}x^T P x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy\end{aligned}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$



Eligiendo  $\delta > 0$  y  $0 < \gamma < a\delta$  aseguramos que  $V(x)$  es definida positiva y  $\dot{V}(x)$  es definida negativa. Por ejemplo, tomando  $\gamma = ka\delta$  con  $0 < k < 1$ , obtenemos la función de Lyapunov

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy \quad (3.9)$$

que satisface las condiciones (3.3) y (3.4) del Teorema 3.1 en el dominio  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -b < x_1 < c\}$ . Concluimos que el origen es AE.  $\circ$

### 3.1.2. Sobre la Región de Atracción. Estabilidad Asintótica Global

Sea  $\phi(t; x)$  la solución de (3.1) que comienza en  $t = 0$  y supongamos que el origen  $x = 0$  es un PE AE. Definimos como *región (dominio) de atracción (RA)* del PE al conjunto de todos los puntos  $x$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x) = 0$ . Es en general difícil o imposible encontrar analíticamente la RA. Sin embargo se pueden usar funciones de Lyapunov para estimarla con conjuntos contenidos en la RA. Por la prueba del Teorema 3.1 sabemos que si existe una función de Lyapunov que satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio  $D$ , y si  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  está acotado y contenido en  $D$ , entonces toda trayectoria que comienza en  $\Omega_c$  permanece en  $\Omega_c$  y tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $\Omega_c$  es una estima de la RA. Esta estima puede ser conservadora, es decir, puede ser mucho más chica que la RA real.

Queremos saber bajo que condiciones la RA es todo el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Esto será así si podemos probar que para todo estado inicial  $x$ , la trayectoria  $\phi(t; x)$  tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , sin importar cuan grande es  $\|x\|$ . Si un PE AE tiene esta propiedad se dice que es *globalmente AE (GAE)*. Recordando otra vez la prueba del Teorema 3.1 vemos que se puede probar GAE si se puede asegurar que cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$  puede incluirse en el interior de un conjunto acotado  $\Omega_c$ . Esto no siempre va a ser posible porque para valores grandes de  $c$  el conjunto  $\Omega_c$  puede no ser acotado. Consideremos por ejemplo la función

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$$

cuyas superficies de nivel  $V(x) = c$  se ven graficadas en la Figura 3.3.

Las superficies de nivel son cerradas sólo para valores pequeños de  $c$ . En este caso,  $\Omega_c$  es acotado porque puede incluirse en una bola cerrada  $B_r$  para algún  $r > 0$ . A medida que  $c$  crece, se llega a un valor a partir del cual la superficies de nivel  $V(x) = c$  es abierta y  $\Omega_c$  no es acotado. Para que  $\Omega_c$  esté en el interior de una bola  $B_r$ ,  $c$  debe satisfacer  $c < \inf_{\|x\| \geq r} V(x)$ . Si

$$\ell = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} V(x) < \infty$$

entonces  $\Omega_c$  será acotado si  $c < \ell$ . En el ejemplo anterior,

$$\ell = \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|x\|=r} \left[ \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2 \right] = \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} = 1$$

Por lo tanto  $\Omega_c$  será acotado sólo para  $c < 1$ . Una condición adicional que asegura que  $\Omega_c$  es acotado para todo valor de  $c$  es

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow \infty$$

Una función que satisface esta condición se dice *radialmente no acotada*.

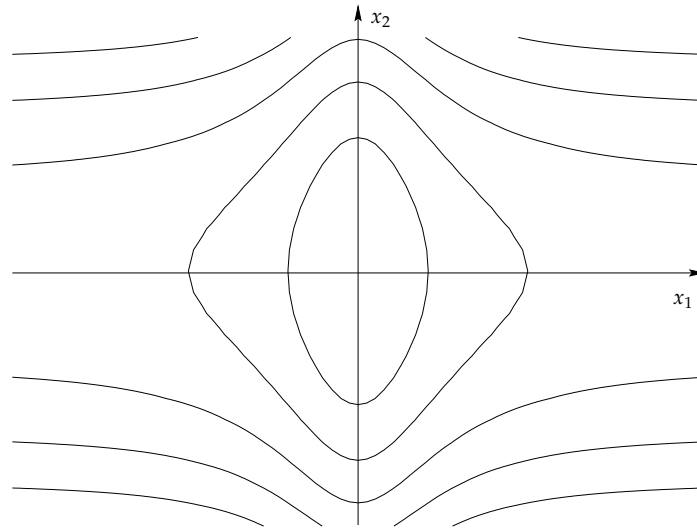


Figura 3.3: Superficies de Lyapunov de  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$

**Teorema 3.2 (Barbashin-Krasovskii).** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{3.10}$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty \tag{3.11}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{3.12}$$

entonces  $x = 0$  es GAE.

*Demostración.* Dado cualquier punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , sea  $c = V(p)$ . La condición (3.11) implica que para cualquier  $c > 0$ , existe  $r > 0$  tal que  $V(x) > c$  cuando  $\|x\| > r$ . Por lo tanto  $\Omega_c \subset B_r$ , lo que implica que  $\Omega_c$  es acotado. El resto de la prueba es similar a la del Teorema 3.1.  $\square$

**Ejemplo 3.6.** Consideremos otra vez el sistema del Ejemplo 3.5, pero supongamos que la condición  $yh(y) > 0$  vale  $\forall y \neq 0$ . La función de Lyapunov (3.9) satisface (3.10) y (3.11) para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Su derivada

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1 - k)x_2^2 - a\delta kx_1h(x_1)$$

es definida negativa para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  porque  $0 < k < 1$ . Por lo tanto el origen es AE.  $\circ$

Notemos que si el origen es GAE, entonces debe ser el *único* PE del sistema.

### 3.1.3. Inestabilidad

Vamos a ver un teorema que prueba que un PE es inestable. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen  $x = 0$ . Supongamos que  $V(0) = 0$  y que hay un punto  $x_0$  arbitrariamente cercano al origen tal que  $V(x_0) > 0$ . Elijamos  $r > 0$  tal que la bola  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  esté contenida en  $D$ , y sea

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\} \tag{3.13}$$

El conjunto  $U$  es no vacío. Su frontera está dada por la superficie  $V(x) = 0$  y la esfera  $\|x\| = r$ . Como  $V(0) = 0$ , el origen está sobre la frontera de  $U$  en el interior de  $B_r$ .

**Teorema 3.3 (Chetaev).** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $V(0) = 0$  y  $V(x_0) > 0$  para algún  $x_0$  con  $\|x_0\|$  arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto  $U$  como en (3.13) y supongamos que  $\dot{V}(x) > 0$  en  $U$ . Entonces  $x = 0$  es inestable.

*Demostración.* El punto  $x_0$  está en el interior de  $U$  y  $V(x_0) = a > 0$ . La trayectoria  $x(t)$  que comienza en  $x(0) = x_0$  debe dejar el conjunto  $U$ . Para probar esto, notemos que mientras  $x(t)$  permanezca en  $U$ ,  $V(x(t)) \geq a$  porque  $\dot{V}(x) > 0$  en  $U$ . Sea

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) \mid x \in U \text{ y } V(x) \geq a\}$$

que existe porque la función continua  $\dot{V}(x)$  tiene un mínimo en el conjunto compacto  $\{x \in U \mid V(x) \geq a\} = \{x \in B_r \mid V(x) \geq a\}$ . Entonces  $\gamma > 0$  y

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq a + \gamma t$$

Esta desigualdad muestra que  $x(t)$  no se puede quedar indefinidamente en  $U$  porque  $V(x)$  está acotada en  $U$ . Ahora,  $x(t)$  no puede dejar  $U$  a través de la superficie  $V(x) = 0$  porque  $V(x(t)) \geq a$ . Por lo tanto debe dejar  $U$  a través de la esfera  $\|x\| = r$ . Como esto pasa para  $\|x_0\|$  arbitrariamente pequeña, el origen es inestable.  $\square$

**Ejemplo 3.7.** Consideremos el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x)\end{aligned}$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  satisfacen

$$|g_i(x)| \leq k\|x\|_2^2$$

en un entorno  $D$  del origen. Esta desigualdad implica que  $g_i(0) = 0$ , por lo tanto el origen es un PE. Consideremos la función

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Sobre el eje  $x_2 = 0$ ,  $V(x) > 0$  en puntos arbitrariamente cercanos al origen. El conjunto  $U$  está graficado en la Figura 3.4. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1g_1(x) - x_2g_2(x)$$

La magnitud del término  $x_1g_1(x) - x_2g_2(x)$  satisface

$$|x_1g_1(x) - x_2g_2(x)| \leq \sum_{i=1}^2 |x_i||g_i(x)| \leq 2k\|x\|_2^3$$

Por lo tanto,

$$\dot{V}(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k\|x\|_2^3 = \|x\|_2^2(1 - 2k\|x\|_2)$$

Elijiendo  $r$  tal que  $B_r \subset D$  y  $r < 1/(2k)$ , vemos que todas las condiciones del Teorema 3.3 se satisfacen. Entonces el origen es inestable.  $\circ$

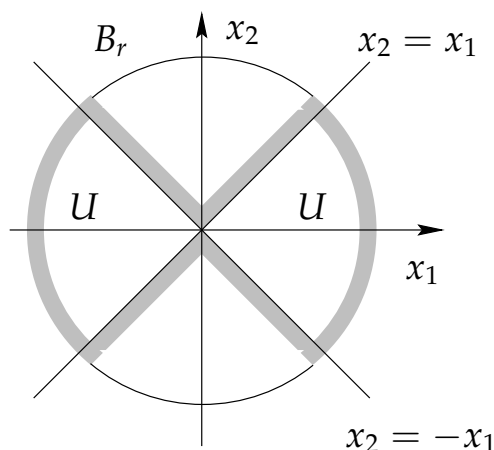


Figura 3.4: El conjunto  $U$  para  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

### 3.2. El Principio de Invariancia

En el Ejemplo 3.4 vimos que la función de energía no era suficiente para probar que el origen es AE porque  $\dot{V}(x) = -(k/m)x_2^2$  es sólo semidefinida negativa. Sin embargo  $\dot{V}(x)$  es siempre negativa salvo en el eje  $x_2 = 0$ , donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Para que el sistema pueda mantener la condición  $\dot{V}(x) = 0$ , la trayectoria debe quedar confinada al eje  $x_2 = 0$ . Pero esto es imposible a menos que  $x_1 = 0$  porque

$$x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_2(t) \equiv 0 \implies \sin x_1(t) \equiv 0$$

Por lo tanto, en el segmento  $-\pi < x_1 < \pi$  del eje  $x_2 = 0$ , el sistema puede mantener la condición  $\dot{V}(x) = 0$  sólo en el origen. Es decir  $V(x(t))$  debe decrecer a cero y en consecuencia  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta idea puede formalizarse en el principio de invariancia de LaSalle, que vamos a enunciar y demostrar luego de introducir algunos conceptos.

Sea  $x(t)$  una solución de (3.1).

- Un punto  $p$  es un *punto límite positivo* de  $x(t)$  si existe una secuencia  $\{t_n\}$ , con  $t_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- El conjunto de todos los puntos límites positivos de  $x(t)$  se denomina el *conjunto límite positivo* de  $x(t)$ .
- Un conjunto  $M$  es un *conjunto invariante* con respecto a (3.1) si

$$x(0) \in M \implies x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Un conjunto  $M$  es un *conjunto invariante positivo* si

$$x(0) \in M \implies x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

- Decimos que  $x(t)$  tiende a  $M$  cuando  $t$  tiende a infinito si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $T > 0$  tal que

$$\text{dist}(x(t), M) < \epsilon, \quad \forall t > T$$

donde  $\text{dist}(p, M)$  denota la distancia de un punto  $p$  a un conjunto  $M$ , es decir,  $\text{dist}(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$ .

Un PE AE es el conjunto límite positivo de toda solución que comience suficientemente cerca del PE. Un ciclo límite estable es conjunto límite positivo de toda solución que comience suficientemente cerca del ciclo límite. La solución tiende al ciclo límite cuando  $t \rightarrow \infty$  pero no necesariamente a algún punto específico del ciclo límite, es decir el  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  no necesariamente existe. El PE y el ciclo límite son conjuntos invariantes porque toda solución que comience sobre ellos se queda allí para todo  $t \in \mathbb{R}$ . El conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  con  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \Omega_c$  es un conjunto invariante positivo.

**Lema 3.4.** Si una solución  $x(t)$  de (3.1) es acotada y permanece en  $D$  para todo  $t \geq 0$ , entonces su conjunto límite positivo  $L^+$  es un conjunto invariante, no vacío y compacto. Además,

$$x(t) \rightarrow L^+ \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

◻

**Teorema 3.5 (LaSalle).** Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a (3.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$ . Entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Sea  $x(t)$  una solución de (3.1) que comienza en  $\Omega$ . Como  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ ,  $V(x(t))$  es una función decreciente de  $t$ . Como  $V(x)$  es continua en el conjunto compacto  $\Omega$ , está acotada inferiormente en  $\Omega$ , por lo tanto  $V(x(t))$  tiene un límite  $a$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Notemos también que el conjunto límite positivo  $L^+$  está en  $\Omega$  porque  $\Omega$  es un conjunto cerrado. Para cada  $p \in L^+$ , existe una secuencia  $t_n$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  y  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por continuidad de  $V(x)$ ,  $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$ , lo que implica  $V(x) = a$  en  $L^+$ . Como  $L^+$  es un conjunto invariante (por Lema 3.4),  $\dot{V}(x) = 0$  en  $L^+$ . Por lo tanto,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Como  $x(t)$  es acotada,  $x(t)$  tiende a  $L^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (por Lema 3.4). Por lo tanto  $x(t)$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . ◻

A diferencia del Teorema de Lyapunov, el Teorema 3.5 no requiere que  $V(x)$  sea definida positiva. Tampoco el conjunto  $\Omega$  está necesariamente ligado a la construcción de  $V(x)$ . Sin embargo, en muchas aplicaciones, la construcción de  $V(x)$  en si misma va a garantizar la existencia de un conjunto  $\Omega$ . En particular, si  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  es acotado y  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega_c$ , entonces podemos tomar  $\Omega = \Omega_c$ . Cuando  $V(x)$  es definida positiva,  $\Omega_c$  es acotado para  $c > 0$  suficientemente pequeño. Esto no es verdad en general si  $V(x)$  no es definida positiva. Por ejemplo si  $V(x) = (x_1 - x_2)^2$ , el conjunto  $\Omega_c$  no es acotado por más pequeño que sea  $c$ . Si  $V(x)$  es radialmente no acotada (o sea, verifica (3.11)), el conjunto  $\Omega_c$  es acotado para todo valor de  $c$ , sea  $V(x)$  definida positiva o no.

Cuando nuestro interés es el de mostrar que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos que probar que el máximo conjunto invariante en  $E$  es el origen. Esto se hace mostrando que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $E$ . Especializando el Teorema 3.5 a este caso, obtenemos los siguientes corolarios, que extienden los Teoremas 3.1 y 3.2.

**Corolario 3.6.** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable y definida positiva en un dominio  $D$  que contiene al origen  $x = 0$ , y tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ . Entonces el origen es AE.  $\circ$

**Corolario 3.7.** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable, radialmente no acotada y definida positiva, y tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ . Entonces el origen es GAE.  $\circ$

**Ejemplo 3.8.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

donde  $g$  y  $h$  son localmente Lipschitz y satisfacen

$$\begin{aligned}g(0) &= 0, & yg(y) &> 0, & \forall y \neq 0, y \in (-a, a) \\ h(0) &= 0, & yh(y) &> 0, & \forall y \neq 0, y \in (-a, a)\end{aligned}$$

El sistema tiene un PE aislado en el origen. Dependiendo de las funciones  $g$  y  $h$ , podría tener otros PE. La ecuación de este sistema puede verse como una generalización de la del péndulo con  $h(x_2)$  como el término de fricción. Tomemos como candidata a función de Lyapunov la función de energía

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y)dy + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (3.14)$$

Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x_i \leq a\}$ .  $V(x)$  es definida positiva en  $D$ . La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(x) = g(x_1)x_2 + x_2[-g(x_1) - h(x_2)] = -x_2h(x_2) \leq 0$$

Por lo tanto,  $\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa. Para caracterizar el conjunto  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , notemos que

$$\dot{V}(x) = 0 \implies x_2h(x_2) = 0 \implies x_2 = 0, \text{ ya que } -a \leq x_2 \leq a$$

Por lo tanto  $S = \{x \in D \mid x_2 = 0\}$ . Supongamos que  $x(t)$  es una trayectoria que pertenece idénticamente a  $S$ . Entonces

$$x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_2(t) \equiv 0 \implies g(x_1(t)) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0$$

Por lo tanto, la única solución que puede quedarse idénticamente en  $S$  es la trivial; concluimos que el origen es AE.

Supongamos ahora que el parámetro  $a = \infty$  y además  $g$  satisface la condición adicional

$$\int_0^y g(z)dz \rightarrow \infty \quad \text{cuando } |y| \rightarrow \infty$$

La función de Lyapunov (3.14) es radialmente no acotada. En forma similar a lo hecho arriba se puede probar que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}^2$ , y el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

contiene ninguna otra solución salvo la trivial. Concluimos que en este caso el origen es GAE.  $\circ$

El teorema de LaSalle no sólo relaja el requisito del teorema de Lyapunov de que la derivada sea definida negativa, sino que lo extiende en tres direcciones:

- da una estima de la región de atracción que no es necesariamente de la forma  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ ;
- se puede usar en casos donde exista un conjunto de equilibrio en lugar de un PE aislado;
- la función  $V(x)$  no tiene que ser definida positiva.

**Ejemplo 3.9.** Consideremos el sistema de primer orden (cf. §1.2.5)

$$\dot{y} = ay + u$$

y la ley de control adaptable

$$u = -ky, \quad \dot{k} = \gamma y^2, \quad \gamma > 0$$

Tomando  $x_1 = y$  y  $x_2 = k$ , el sistema a lazo cerrado se representa como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - a)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma x_1^2 \end{aligned}$$

El eje  $x_1 = 0$  es un conjunto de equilibrio del sistema. Queremos probar que toda trayectoria del sistema tiende a este conjunto de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ , lo que significa que el control adaptable logra regular  $y$  a cero. Consideremos la candidata a función de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2$$

donde  $b > a$ . La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 \\ &= -x_1^2(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) \\ &= -x_1^2(b - a) \leq 0 \end{aligned}$$

Como  $V(x)$  es radialmente no acotada, el conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$  es un conjunto invariante positivo compacto. Por lo tanto, tomando  $\Omega = \Omega_c$  se cumplen todas las condiciones del Teorema 3.5. El conjunto  $E$  está dado por

$$E = \{x \in \Omega_c \mid x_1 = 0\}$$

Como todo punto en el eje  $x_1 = 0$  es un PE,  $E$  es un conjunto invariante. Por lo tanto, en este ejemplo,  $M = E$ . Por el Teorema 3.5 concluimos que toda trayectoria que comienza en  $\Omega_c$  tiende a  $E$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; es decir,  $x_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . más aún, como  $V(x)$  es radialmente no acotada, esta conclusión es global.  $\circ$

Notemos que si no conocemos la constante  $a$ , o una cota de ella, la función de Lyapunov del ejemplo anterior no se conoce, sólo se sabe que existe.

### 3.3. Región de Atracción

Sea el origen  $x = 0$  un PE AE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.15)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene el origen. Sea  $\phi(t; x)$  la solución de (3.15) con estado inicial  $x$  en  $t = 0$ . La región de atracción (RA) del origen,  $R_A$ , se define como

$$R_A = \{x \in D \mid \phi(t; x) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

El siguiente Lema enuncia algunas propiedades de la RA.

**Lema 3.8.** Si  $x = 0$  es un PE AE de (3.15), entonces su RA  $R_A$  es un conjunto conexo e invariante. más aún, la frontera de  $R_A$  está formada por trayectorias.  $\circ$

**Ejemplo 3.10.** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

es la ecuación de Van der Pol en tiempo invertido, es decir, reemplazando  $t$  por  $-t$ . El sistema tiene un PE en el origen y un ciclo límite (CL) inestable (ver Figura 3.5). El retrato de fase

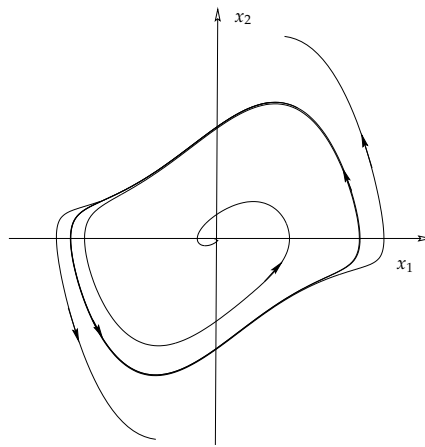


Figura 3.5: Retrato de fase para el Ejemplo 3.10

muestra que el origen es un foco estable, por lo tanto es AE. Esto se confirma linealizando, ya que obtenemos

$$A = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

que tiene autovalores en  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ . La RA es acotada porque las trayectorias que comienzan afuera del CL no lo pueden cruzar para llegar al origen. Como no hay otro PE, la frontera de  $R_A$  tiene que ser el CL.  $\circ$



**Ejemplo 3.11.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

que tiene tres PE aislados en  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{3},0)$  y  $(-\sqrt{3},0)$ . El retrato de fase, graficado en la Figura 3.6, muestra que el origen es un foco estable y los otros dos PE son ensilladuras. Por lo tanto, el origen es AE y los otros PE son inestables, lo que se puede confirmar linealizando. De la figura se puede ver que las trayectorias estables de la ensilladura forman dos *separatrices* que son la frontera de la RA, la cual es no acotada.  $\circ$

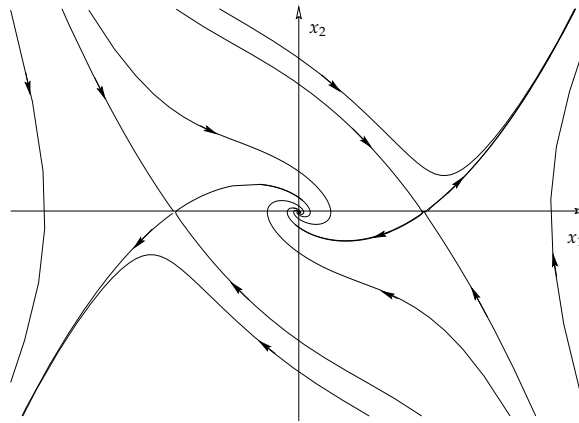


Figura 3.6: Retrato de fase para el Ejemplo 3.11

**Ejemplo 3.12.** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

tiene un PE aislado en el origen y un continuo de PEs sobre el círculo unitario: cada punto sobre el círculo unitario es un PE. Es claro que  $R_A$  debe estar confinada al interior del círculo unitario. Las trayectorias de este sistemas son los radios del círculo unitario, lo que se puede ver transformando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta, & x_2 &= \rho \sen \theta \\ \dot{\rho} &= -\rho(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

Toda trayectoria que comienza con  $\rho < 1$  tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $R_A$  es el interior del círculo unitario.  $\circ$

El método de Lyapunov puede usarse para encontrar estimas de la RA. Por una estima de la RA entendemos un conjunto  $\Omega \subset R_A$  tal que toda trayectoria que comienza en  $\Omega$  tienda al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Vamos primero a mostrar que el dominio  $D$  del Teorema 3.1 no es una estima de  $R_A$ . Vimos en el Teorema 3.1 que si  $D$  es un dominio que contiene el origen, y si podemos encontrar una función de Lyapunov  $V(x)$  que es definida positiva en  $D$  y  $\dot{V}(x)$  es definida negativa en  $D$ , entonces el origen es AE. Se podría pensar que  $D$  es una estima de la RA. Esto no es cierto, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.13.** Consideremos otra vez el sistema (3.17), que es un caso especial del sistema del Ejemplo 3.5 con  $h(x_1) = x_1 - \frac{1}{3}x_1^3$  y  $a = 1$ . Por lo tanto, una función de Lyapunov es (3.9), donde tomamos, por ejemplo,  $\delta = 1, k = 1/2$ :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \int_0^{x_1} (y - \frac{1}{3}y^3) dy \\ &= \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{aligned}$$

Definiendo el dominio  $D$  como

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3}\}$$

vemos que  $\dot{V}(x) > 0$  en  $D$  y  $\dot{V}(x) < 0$  en  $D - \{0\}$ . Sin embargo, se puede ver en el retrato de fase de la Figura 3.6 que  $D$  no está incluido en  $R_A$ .  $\circ$

El ejemplo anterior muestra que el hecho de que  $\dot{V}(x) < 0$  en una región no implica que la región sea una estima de la RA. Aunque una trayectoria que comienza en  $D$  se va a mover de una superficie de nivel  $V(x) = c_1$  a otra interior  $V(x) = c_2$  con  $c_2 < c_1$ , no hay garantía de que la trayectoria permanecerá para siempre en  $D$ . Una vez que la trayectoria sale de  $D$ , no hay garantía de que  $\dot{V}(x)$  sea negativa. Para que una región sea una estima de la RA debe ser un conjunto invariante positivo, es decir, toda trayectoria que comienza en el conjunto debe permanecer dentro de él en todo tiempo futuro. La estima más simple de la RA es el conjunto

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$$

cuando  $\Omega_c$  es acotado y está contenido en  $D$ . Esto sigue como corolario del Teorema 3.5.

Usando los resultados de linealización de §3.4, sabemos que si la matriz Jacobiana

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

es Hurwitz, entonces siempre podemos encontrar una función de Lyapunov cuadrática  $V(x) = x^T Px$  resolviendo la ecuación de Lyapunov (3.20). Entonces, si  $A$  es Hurwitz, *podemos siempre estimar la RA del origen*. Esto lo ilustramos en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.14.** Consideremos nuevamente el sistema del Ejemplo 3.10. Vimos que el origen es AE. Tomando  $Q = I$  y  $A$  de (3.16), obtenemos como única solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ , la matriz definida positiva

$$P = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

La función cuadrática  $V(x) = x^T Px > 0$  es una función de Lyapunov para el sistema en un entorno del origen. Tenemos que determinar un dominio  $D$  alrededor del origen donde  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa y un conjunto  $\Omega_c \subset D$  que sea acotado. Nos va a interesar encontrar  $\Omega_c$  lo más grande posible, es decir, el mayor valor para la constante  $c$ , porque  $\Omega_c$  será nuestra estima de la RA.

La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2)$$

El primer término del lado derecho es la contribución de la parte lineal  $Ax$ , mientras que el segundo es la contribución de la parte no lineal  $g(x) = f(x) - Ax$ , que llamaremos el término de perturbación. Como

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|x\|_2 \rightarrow 0$$

sabemos que hay una bola abierta  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < r\}$  en donde  $\dot{V}(x)$  es definida negativa. Una vez que encontremos  $D$ , podemos encontrar  $\Omega_c \subset D$  eligiendo

$$c < \min_{\|x\|_2=r} V(x) = \lambda_{\min}(P)r^2$$

Por lo tanto, para agrandar la RA tenemos que encontrar la bola más grande para la cual  $\dot{V}(x)$  es definida negativa. Tenemos que

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|_2^2 + |x_1||x_1x_2||x_1 - 2x_2| \leq -\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|_2^4$$

donde usamos  $|x_1| \leq \|x\|_2$ ,  $|x_1x_2| \leq \frac{1}{2}\|x\|_2^2$  y  $|x_1 - 2x_2| \leq \sqrt{5}\|x\|_2$ . Por lo tanto,  $\dot{V}(x)$  es definida negativa en la bola  $D$  con radio dado por  $r^2 = 2/\sqrt{5} = 0,8944$ . En este ejemplo se puede encontrar una estima menos conservadora trabajando en coordenadas polares. Tomando

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sen \theta$$

tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho^2 + \rho^4 \cos^2 \theta \sen \theta (2 \sen \theta - \cos \theta) \\ &\leq -\rho^2 + \rho^4 |\cos^2 \theta \sen \theta| |2 \sen \theta - \cos \theta| \\ &\leq -\rho^2 + \rho^4 \times 0,3849 \times 2,2361 \\ &\leq -\rho^2 + 0,861\rho^4 < 0, \quad \text{para} \quad \rho^2 < 1/0,861 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando (3.18) junto con  $\lambda_{\min}(P) \geq 0,69$ , elegimos

$$c = 0,8 < \frac{0,69}{0,861}$$

El conjunto  $\Omega_c$  con  $c = 0,8$  es una estima de la RA. ◦

### 3.4. Sistemas Lineales y Linealización

El sistema lineal invariante

$$\dot{x} = Ax \quad (3.19)$$

tiene un equilibrio en el origen, que es aislado sí  $\det A \neq 0$ . Si  $\det A = 0$ , todo punto en el kernel o subespacio nulo de  $A$  es un PE. Un sistema lineal no puede tener múltiples PE aislados, porque si  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  son dos PE de (3.19), entonces, por linealidad, todo punto en la recta que conecta a  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  es un PE. Las propiedades de estabilidad del origen pueden caracterizarse mediante la ubicación de los autovalores de  $A$ .

**Teorema 3.9 (Estabilidad del Origen en Sistemas Lineales).** El PE  $x = 0$  de (3.19) es estable sí todos los autovalores de  $A$  tienen parte real no positiva y cada autovalor con parte real nula tiene un bloque de Jordan asociado de orden 1. El PE  $x = 0$  es GAE sí todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.  $\circ$

Cuando todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa, se dice que  $A$  es una *matriz de estabilidad* o *matriz Hurwitz*. La estabilidad del origen puede también investigarse usando el método de Lyapunov. Consideremos la candidata a función de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

donde  $P$  es una matriz real simétrica definida positiva. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica definida por

$$PA + A^T P = -Q \tag{3.20}$$

Si  $Q$  es definida positiva, podemos concluir por el Teorema 3.1 que el origen es AE. En el caso de sistemas lineales, es posible revertir los pasos del método de Lyapunov. Supongamos que comenzamos eligiendo  $Q$  como una matriz real simétrica definida positiva, y resolvemos (3.20) para encontrar  $P$ . Si (3.20) tiene una solución definida positiva, podemos nuevamente concluir que el origen es AE. La ecuación (3.20) se denomina *ecuación de Lyapunov*.

**Teorema 3.10.** Una matriz  $A$  es Hurwitz, o sea, todos sus autovalores tienen parte real negativa, sí dada una matriz  $Q$  simétrica y definida positiva, existe una matriz  $P$  simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov (3.20). Más aún, si  $A$  es Hurwitz, entonces  $P$  es la única solución de (3.20).

*Demostración.* La suficiencia sigue del Teorema 3.1 con la función de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , como ya mostramos. Para probar la necesidad, supongamos que todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa y consideremos la siguiente matriz  $P$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \tag{3.21}$$

El integrando es una suma de términos de la forma  $t^{k-1} e^{\lambda_i t}$  con  $\text{Re } \lambda_i < 0$ . Por lo tanto, la integral existe. La matriz  $P$  es simétrica. Para probar que es definida positiva, suponemos lo contrario, es decir, que existe un vector  $x \neq 0$  tal que  $x^T P x = 0$ . Sin embargo,

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\implies \int_0^{\infty} x^T e^{A^T t} Q e^{A t} x dt = 0 \\ &\implies e^{A t} x \equiv 0, \forall t \geq 0 \implies x = 0 \end{aligned}$$

porque  $e^{A t}$  es no-singular para todo  $t$ . Esta contradicción muestra que  $P$  es definida positiva. Sustituyendo (3.21) en (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt + \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{A^T t} Q e^{A t} \\ &= e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$

lo que muestra que  $P$  es una solución de (3.20). Para mostrar que es la única solución, supongamos que existe otra solución  $\bar{P} \neq P$ . Entonces,

$$(P - \bar{P})A + A^T(P - \bar{P}) = 0$$

Pre-multiplicando por  $e^{A^T t}$  y post-multiplicando por  $e^{At}$ , obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt} e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{At}$$

Por lo tanto,

$$e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{At} \equiv \text{constante } \forall t$$

Evaluando en  $t = 0$  y  $t = \infty$  obtenemos  $\bar{P} = P$ . □

La resolución de la ecuación de Lyapunov (3.20) no es numéricamente más ventajosa que calcular los autovalores de  $A$ . La ventaja de este método es que nos provee de una función de Lyapunov cuando  $A$  es Hurwitz. Esto nos va a servir para sacar conclusiones sobre el sistema cuando el lado derecho  $Ax$  esté perturbado.

Volvamos al sistema no lineal (3.1)

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que el origen  $x = 0$  está en el interior de  $D$  y es un PE del sistema; es decir  $f(0) = 0$ . Por el teorema del valor medio

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x \tag{3.22}$$

donde  $z_i$  es un punto sobre el segmento de línea que conecta  $x$  al origen. La igualdad (3.22) vale para todo punto  $x \in D$  tal que el segmento de línea que conecta  $x$  al origen esté totalmente contenido en  $D$ . Como  $f(0) = 0$ , podemos escribir  $f_i(x)$  como

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

Por lo tanto

$$f(x) = Ax + g(x)$$

donde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad g_i(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

La función  $g_i(x)$  satisface

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|$$

Por continuidad de  $\partial f / \partial x$  vemos que

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow 0$$

Esto sugiere que en un entorno pequeño del origen podemos aproximar al sistema no lineal (3.1) por su linealización alrededor del origen

$$\dot{x} = Ax \quad \text{donde} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

El siguiente teorema, conocido como el *método indirecto de Lyapunov*, da condiciones para determinar la estabilidad del origen del sistema no lineal, a través del estudio de la estabilidad del sistema linealizado.

**Teorema 3.11 (Método Indirecto de Lyapunov).** Sea  $x = 0$  un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un entorno del origen. Sea

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

Entonces

1. El origen es AE si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.
2. El origen es inestable si uno o más autovalores de  $A$  tiene parte real positiva.

*Demostración.* Para probar la primera parte, asumamos que  $A$  es Hurwitz. Por el Teorema 3.10 sabemos que dada cualquier  $Q > 0$  simétrica, la solución  $P$  de (3.20) es definida positiva. Usamos

$$V(x) = x^T P x$$

como candidata a función de Lyapunov para el sistema no lineal. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P f(x) + [f(x)]^T P x \\ &= x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x \\ &= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P g(x) \\ &= -x^T Q x + 2x^T P g(x) \end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho es definido negativo, mientras que el segundo es, en general, indefinido. La función  $g(x)$  satisface

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|x\|_2 \rightarrow 0$$

Por lo tanto, dado  $\gamma > 0$  existe  $r > 0$  tal que

$$\|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

Entonces

$$\dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

pero

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2$$

donde  $\lambda_{\min}(\cdot)$  denota el mínimo autovalor de una matriz. Notar que  $\lambda_{\min}(Q)$  es real y positivo porque  $Q$  es simétrica y definida positiva. Por lo tanto

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\|P\|_2] \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

Eligiendo  $\gamma < \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|_2)$  aseguramos que  $\dot{V}(x)$  es negativa definida. Por el Teorema 3.1, el origen es AE.

La prueba de la segunda parte queda como ejercicio. □

**Ejemplo 3.15.** Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = ax^3$$

Linealizando alrededor del origen obtenemos

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} = 3ax^2|_{x=0} = 0$$

El autovalor está sobre el eje imaginario, por lo que no podemos decir nada acerca de la estabilidad del origen como PE del sistema no lineal usando el sistema linealizado. Esta conclusión es genuina ya que el origen puede ser AE, estable o inestable dependiendo del valor del parámetro  $a$ . Si  $a < 0$ , el origen es AE como puede probarse usando la función de Lyapunov  $V(x) = x^4$ . Si  $a = 0$ , el sistema es lineal y el origen es estable. Si  $a > 0$ , el origen es inestable, como puede concluirse usando el Teorema 3.3 y la función  $V(x) = x^4$ , cuya derivada sobre las trayectorias del sistema es  $\dot{V}(x) = 4ax^6 > 0$  si  $a > 0$ . ○

# Bibliografía

- Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.
- Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.
- Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.
- Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.
- Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.
- Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.
- Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.
- van der Schaft, A. J. (2000).  *$L_2$ -gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.



# Índice alfabético

- Banach, *véase* espacio de Banach  
Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii
- Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy  
centro, 12  
Chetaev, *véase* teorema de Chetaev  
ciclo límite, 19  
clausura, 25  
condición de Lipschitz, 27  
conjunto cerrado, 25  
control adaptable, 9  
convergencia de secuencias, 25  
Coulomb, *véase* fricción de Coulomb
- desigualdad de Gronwall-Bellman, 24  
desigualdad de Hölder, 23  
diodo túnel, 5, 16
- ecuación de Lienard, 8  
ecuación de sensibilidad, 37  
ecuación de Van der Pol, 8, 20  
ensilladura, 10  
equilibrios  
  definición, 3  
  hiperbólicos, 15  
  múltiples, 15  
  perturbación, 13  
espacio de Banach, 25  
espacio lineal normado, 25  
estabilidad, 40  
estabilidad asintótica global, 47  
estabilidad estructural, 15
- foco, 12  
forma de Jordan, 15  
fricción de Coulomb, 7  
fricción estática, 7  
función de Lyapunov, 42  
función de sensibilidad, 37  
función definida positiva, 43
- Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman
- Hölder, *véase* desigualdad de Hölder  
inestabilidad, 40, 48
- Jacobiana, 18  
Jordan, *véase* forma de Jordan
- LaSalle, *véase* teorema de LaSalle  
Lienard, *véase* ecuación de Lienard  
linealización  
  análisis de puntos de equilibrio, 16  
  y estabilidad, 57  
Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz  
Lyapunov  
  función, 42  
  método directo, 41  
  método indirecto, 60  
  superficie, 42  
  teorema de estabilidad, 41
- método del gradiente variable, 45  
método indirecto de Lyapunov, 60  
mapa contractivo, 25  
matriz Jacobiana, 18
- nodo, 10  
norma, 25
- oscilador  
  armónico, 19  
  de relajación, 20  
  de resistencia negativa, 8  
  de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol
- péndulo, 4, 16  
perturbación de equilibrios, 13  
principio de comparación, 37  
principio de invariancia, 50  
punto fijo, 25  
puntos de equilibrio, 3
- región de atracción, 47, 54  
retrato de fase, 10  
  construcción numérica, 20

- 
- secuencia convergente, 25
  - secuencia de Cauchy, 25
  - sensibilidad, 37
  - separatriz, 16
  - sistema masa-resorte, 6
  - superficie de Lyapunov, 42
  
  - teorema de Barbashin-Krasovskii, 47
  - teorema de Chetaev, 48
  - teorema de estabilidad de Lyapunov, 41
  - teorema de LaSalle, 51
  
  - Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol