## Capítulo 4

# Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Inestacionarios

Este capítulo extiende el método de Lyapunov a sistemas no lineales inestacionarios. Definimos los conceptos de estabilidad uniforme, estabilidad asintótica uniforme, y estabilidad exponencial de un punto de equilibrio, y damos sus teoremas correspondientes. Presentamos además teoremas *conversos*, que establecen la existencia de funciones de Lyapunov para clases de sistemas no lineales. Finalmente, extendemos el principio de invariancia de LaSalle a sistemas inestacionarios.

## 4.1. El Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema inestacionario

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{4.1}$$

donde $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ es seccionalmente continua en $t$ y localmente Lipschitz en $x$ en $[0, \infty) \times D$, y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. El origen es un PE de (4.1) para $t = 0$ si

$$f(t, 0) = 0\,, \quad \forall t \geq 0$$

Un equilibrio en el origen puede ser la translación de un PE que no está en cero o, más generalmente, la translación de una solución no nula del sistema. Para ver este último punto, supongamos que $\tilde{y}(\tau)$ es una solución del sistema

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y)$$

definida para todo $\tau \geq a$. El cambio de variables

$$x = y - \tilde{y}(\tau)\,; \qquad t = \tau - a$$

transforma al sistema en la forma

$$\dot{x} = g(t + a, x + \tilde{y}(t + a)) - \dot{\tilde{y}}(t + a) \triangleq f(t, x)$$

Como

$$\dot{\tilde{y}}(t + a) = g(t + a, \tilde{y}(t + a))\,, \quad \forall t \geq 0$$

el origen $x = 0$ es un PE del sistema transformado para $t = 0$. Por lo tanto, examinando la estabilidad del origen como un PE del sistema transformado, determinamos la estabilidad de la solución $\tilde{y}(\tau)$ del sistema original. Notar que si $\tilde{y}(\tau)$ no es constante, el sistema transformado es inestacionario aunque el sistema original sea estacionario. Por lo tanto, el estudio de estabilidad de soluciones en el sentido de Lyapunov sólo puede hacerse mediante el estudio de la estabilidad de equilibrios de sistemas inestacionarios.

Antes de definir estabilidad para el sistema (4.1), veamos un par de ejemplos.

**Ejemplo 4.1 (Estabilidad no uniforme en $t$).** El sistema lineal de primer orden

$$\dot{x} = (6t \operatorname{sen} t - 2t)x$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} (6t \operatorname{sen} \tau - 2\tau) d\tau\right] \\ &= x(t_0) \exp\left[6 \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2 - 6 \operatorname{sen} t_0 + 6t_0 \cos t_0 + t_0^2\right] \end{aligned}$$

Para cualquier $t_0$, el término $-t^2$ va a dominar, lo que muestra que la exponencial está acotada para todo $t \geq t_0$ por una constante $c(t_0)$ dependiente de $t_0$. Por lo tanto

$$|x(t)| < |x(t_0)| c(t_0)\,, \quad \forall t \geq t_0$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, la elección $\delta = \epsilon / c(t_0)$ muestra que el origen es estable. Supongamos ahora que $t_0$ toma sucesivamente los valores $t_0 = 2n\pi$ con $n = 0, 1, \ldots$, y supongamos que $x(t)$ es evaluada $\pi$ segundos más tarde en cada caso. Tenemos

$$x(t_0 + \pi) = x(t_0) \exp[(4n + 1)(6 - \pi)\pi]$$

Esto implica que, para $x(t_0) \neq 0$,

$$\frac{x(t_0 + \pi)}{x(t_0)} \to \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, no existe $\delta$ independiente de $t_0$ tal que la propiedad de estabilidad valga uniformemente en $t_0$. ○

**Ejemplo 4.2 (Estabilidad asintótica no uniforme).** El sistema lineal de primer orden

$$\dot{x} = -\frac{x}{1 + t}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{-1}{1 + \tau} d\tau\right] \\ &= x(t_0) \frac{1 + t_0}{1 + t} \end{aligned}$$

Como $|x(t)| \leq |x(t_0)|$ para todo $t \geq t_0$, el origen es estable; es más, dado $\epsilon > 0$ podemos elegir $\delta$ independiente de $t_0$. También es claro que

$$x(t) \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe $T(\epsilon, t_0)$ tal que $|x(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0 + T$. Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 3.1, el origen es AE. Notemos, sin embargo, que la convergencia de $x(t)$ al origen no es uniforme con respecto a $t_0$ porque $T$ no puede elegirse independiente de $t_0$. ○

Nos va a interesar entonces definir estabilidad del origen como una propiedad uniforme con respecto al instante inicial.

**Definición 4.1 (Estabilidad Uniforme).** El PE $x = 0$ de (4.1) es

- *estable*, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon\,, \quad \forall t \geq t_0 \tag{4.2}$$

- *uniformemente estable*, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, independiente de $t_0$, tal que (4.2) se satisface.
- *inestable*, si no es estable.
- *asintóticamente estable*, si es estable y existe $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, para todo $\|x(t_0)\| < c$.
- *uniformemente asintóticamente estable*, si es uniformemente estable y existe $c > 0$ independiente de $t_0$ tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, uniformemente en $t_0$; es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon\,, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon)\,, \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

- *globalmente uniformemente asintóticamente estable*, si es uniformemente estable y para cada par de números positivos $\epsilon$ y $c$, existe $T = T(\epsilon, c)$ tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon\,, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon, c)\,, \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

○

Podemos caracterizar las propiedades introducidas en Definición 4.1 en términos de un tipo especial de funciones escalares, conocidas como funciones clase $\mathcal{K}$ y clase $\mathcal{KL}$.

**Definición 4.2 (Función de Clase $\mathcal{K}$).** Una función continua $\alpha : [0, a) \to [0, \infty)$ pertenece a la clase $\mathcal{K}$ si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase $\mathcal{K}_\infty$ si $a = \infty$ y $\alpha(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$. ○

**Definición 4.3 (Función de Clase $\mathcal{KL}$).** Una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ pertenece a la clase $\mathcal{KL}$ si, para cada $s$ fijo, el mapeo $\beta(r, s)$ es clase $\mathcal{K}$ con respecto a $r$, y, para cada $r$ fijo, el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a $s$ y $\beta(r, s) \to 0$ cuando $s \to \infty$. ○

**Ejemplo 4.3 (Funciones clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$).**

- $\alpha(r) = \arctan r$ es clase $\mathcal{K}$ pero no $\mathcal{K}_\infty$.
- $\alpha(r) = r^c$ con $c$ cualquier número real positivo, es clase $\mathcal{K}_\infty$.
- $\beta(r, s) = r/(ksr + 1)$, con $k$ cualquier número real positivo, es clase $\mathcal{KL}$.
- $\beta(r, s) = r^c e^{-s}$, con $c$ cualquier número real positivo, es clase $\mathcal{KL}$.

○

**Lema 4.1.** Sean $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ funciones clase $\mathcal{K}$ en $[0, a)$, $\alpha_3(\cdot)$ y $\alpha_4(\cdot)$ funciones clase $\mathcal{K}_\infty$, y $\beta(\cdot, \cdot)$ una función clase $\mathcal{KL}$. Denotemos $\alpha_i^{-1}(\cdot)$ a la inversa de $\alpha_i(\cdot)$. Entonces

- $\alpha_1^{-1}$ está definida en $[0, \alpha_1(a))$ y es clase $\mathcal{K}$.
- $\alpha_3^{-1}$ está definida en $[0, \infty)$ y es clase $\mathcal{K}_\infty$.
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$ es clase $\mathcal{K}$.
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$ es clase $\mathcal{K}_\infty$.
- $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ es clase $\mathcal{KL}$.

$\circ$

El siguiente lema da definiciones equivalentes para estabilidad uniforme y EA uniforme usando funciones clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$.

**Lema 4.2 (Propiedades de funciones clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$).** El PE $x = 0$ de (4.1) es

- *uniformemente estable* síí existe una función $\alpha(\cdot)$ clase $\mathcal{K}$ y una constante positiva $c$, independiente de $t_0$, tal que

$$\|x(t)\| \le \alpha(\|x(t_0)\|)\,, \quad \forall t \ge t_0 \ge 0\,, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \tag{4.3}$$

- *uniformemente asintóticamente estable* síí existe una función $\beta(\cdot,\cdot)$ clase $\mathcal{KL}$ y una constante positiva $c$, independiente de $t_0$, tal que

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)\,, \quad \forall t \ge t_0 \ge 0\,, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \tag{4.4}$$

- *globalmente uniformemente asintóticamente estable* síí (4.4) se satisface para cualquier estado inicial $x(t_0)$.

$\circ$

Para sistemas estacionarios, estabilidad y AE según la Definición 3.1 implican la existencia de funciones clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$ que satisfacen (4.3) y (4.4). Esto es porque para sistemas estacionarios, la estabilidad y AE del origen son uniformes con respecto al instante inicial.

Un caso especial de estabilidad asintótica uniforme ocurre cuando la función $\beta$ en (4.4) tiene la forma $\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}$.

**Definición 4.4 (Estabilidad Exponencial).** El PE $x = 0$ de (4.1) es *exponencialmente estable* si la desigualdad (4.4) se satisface con

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}\,, \quad k > 0\,,\ \gamma > 0$$

y es *globalmente exponencialmente estable* si esta condición se satisface para cualquier estado inicial. $\circ$

Una función definida positiva puede acotarse con funciones clase $\mathcal{K}$, como lo muestra el siguiente lema.

**Lema 4.3 (Signo definido y funciones clase $\mathcal{K}$).** Sea $V(x) : D \to \mathbb{R}$ una función continua definida positiva, definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen. Sea $B_r \subset D$ para algún $r > 0$. Entonces existen $\alpha_1$ y $\alpha_2$, funciones clase $\mathcal{K}$ definidas en $[0, r)$, tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|)$$

para todo $x \in B_r$. Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$ y $V(x)$ es radialmente no acotada, entonces $\alpha_1$ y $\alpha_2$ pueden elegirse clase $\mathcal{K}_\infty$ y la desigualdad anterior vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$. $\circ$

Si $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ es una función definida positiva cuadrática, el lema anterior sigue de las desigualdades

$$\lambda_{min}(P)\|x\|_2^2 \le x^{\mathrm{T}}Px \le \lambda_{max}(P)\|x\|_2^2$$

El siguiente es el teorema principal de esta sección.

**Teorema 4.4 (Estabilidad Asintótica Uniforme).** Sea $x = 0$ un PE de (4.1) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x) \tag{4.6}$$

$\forall t \ge 0$, $\forall x \in D$, donde $W_i(x)$ son funciones continuas definidas positivas en $D$. Entonces $x = 0$ es uniformemente AE. ◦

Una función $V(t,x)$ que satisface la desigualdad (4.5) se denomina *definida positiva*; una función $V(t,x)$ que satisface la desigualdad (4.6) se denomina *decreciente*. Una función $V(t,x)$ que satisface (4.5) y (4.6) se denomina función de Lyapunov.

En la prueba del Teorema 4.4 (Khalil, 1996) se da una estima de la región de atracción del origen a través del conjunto

$$\{x \in B_r \mid W_2(x) \le \rho\}$$

Esta estima nos permite obtener una versión global del Teorema 4.4.

**Corolario 4.5 (Estabilidad Asintótica Uniforme Global).** Supongamos que las condiciones del Teorema 4.4 se satisfacen para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $W_1(x)$ es radialmente no acotada. Entonces $x = 0$ es globalmente uniformemente AE. ◦

El siguiente corolario da la versión para estabilidad exponencial.

**Corolario 4.6 (Estabilidad Exponencial Uniforme).** Supongamos que las condiciones del Teorema 4.4 se satisfacen con

$$W_1(x) \ge k_1\|x\|^c, \qquad W_2(x) \le k_2\|x\|^c, \qquad W_3(x) \ge k_3\|x\|^c$$

para ciertas constantes positivas $k_1$, $k_2$, $k_3$ y $c$. Entonces $x = 0$ es exponencialmente estable. Más aún, si las condiciones valen globalmente, entonces $x = 0$ es globalmente exponencialmente estable. ◦

**Ejemplo 4.4 (Sistema globalmente exponencialmente estable).** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)\,x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

donde $g(t)$ es continuamente diferenciable y satisface

$$0 \le g(t) \le k, \qquad \dot{g}(t) \le g(t), \; \forall t \ge 0$$

Tomemos $V(t,x) = x_1^2 + [1+g(t)]\, x_2^2$ como candidata a función de Lyapunov. Es fácil de ver que

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(t,x) \le x_1^2 + (1+k)\, x_2^2\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto, $V(t,x)$ es definida positiva, decreciente, y radialmente no acotada. La derivada de $V$ sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot V(t,x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2+2g(t) - \dot g(t)]x_2^2$$

Usando la desigualdad

$$2+2g(t) - \dot g(t) \ge 2 + 2g(t) - g(t) \ge 2$$

obtenemos

$$\dot V(t,x) \le -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq -x^{\mathrm{T}}Qx$$

donde $Q$ es definida positiva; por lo tanto $\dot V(t,x)$ es definida negativa. Todas las condiciones del Teorema 4.4 se satisfacen globalmente con funciones cuadráticas $W_1$, $W_2$ y $W_3$ definidas positivas. Por el Corolario 4.6, concluimos que el origen es globalmente exponencialmente estable. ○

**Ejemplo 4.5 (Sistema lineal inestacionario).** El sistema lineal no estacionario

$$\dot x = A(t)x \tag{4.7}$$

tiene un PE en $x = 0$. Sea $A(t)$ continua para todo $t \ge 0$. Supongamos que existe una matriz $P(t)$ simétrica, continuamente diferenciable, acotada y definida positiva, es decir,

$$0 \le c_1 I \le P(t) \le c_2 I\,, \quad \forall t \ge 0$$

que satisface la ecuación diferencial matricial

$$-\dot P = P(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t) + Q(t) \tag{4.8}$$

donde $Q(t)$ es continua, simétrica y definida positiva; es decir,

$$Q(t) \ge c_3 I > 0\,, \quad \forall t \ge 0$$

Consideremos la candidata a función de Lyapunov

$$V(t,x) = x^{\mathrm{T}}P(t)x$$

La función $V(t,x)$ es definida positiva, decreciente y radialmente no acotada, ya que

$$c_1\|x\|_2^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|_2^2$$

La derivada de $V$ sobre las trayectorias del sistema (4.7) está dada por

$$\begin{aligned} \dot V(t,x) &= x^{\mathrm{T}}\dot P(t)x + x^{\mathrm{T}}P(t)\dot x + \dot x^{\mathrm{T}}P(t)x \\ &= x^{\mathrm{T}}[\dot P + P(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t)]x \\ &= -x^{\mathrm{T}}Q(t)x \\ &\le -c_3\|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot V(t,x)$ es definida negativa. Todas las condiciones del Corolario 4.6 se satisfacen globalmente con c=2. Concluimos que el origen es globalmente exponencialmente estable. ○

## 4.2. Teoremas Conversos

El Teorema 4.4 y sus corolarios establecen estabilidad asintótica uniforme (o estabilidad exponencial) del origen requiriendo la existencia de una función de Lyapunov que satisfaga ciertas condiciones. Dos preguntas se nos ocurren inmediatamente: primero, ¿existe una función que satisfaga las condiciones del teorema? Y segundo, ¿cómo la encontramos si existe? Los teoremas conversos dan una respuesta afirmativa a la primera pregunta. Para responder a la segunda pregunta vamos a ver más adelante que vamos a tener que especializar el análisis a ciertas clases de sistemas no lineales.

**Teorema 4.7.** Sea $x = 0$ un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$, y la matriz Jacobiana $\partial f/\partial x$ es acotada en $D$, uniformemente en $t$. Sean $k, \gamma$ y $r_0$ constantes positivas con $r_0 < r/k$. Sea $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r_0\}$. Supongamos que las trayectorias del sistema satisfacen

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)}\,, \quad \forall x(t_0) \in D_0\,, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Entonces existe una función $V : [0, \infty) \times D_0 \to \mathbb{R}$ que satisface las desigualdades

$$\begin{aligned} c_1\|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -c_3\|x\|^2 \\ \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| &\leq c_4\|x\| \end{aligned}$$

para ciertas constantes positivas $c_1$, $c_2$, $c_3$ y $c_4$. Más aún, si $r = \infty$ y el origen es globalmente exponencialmente estable, entonces $V(t, x)$ está definida y satisface las desigualdades de arriba en todo $\mathbb{R}^n$. Si el sistema es estacionario, $V$ puede elegirse independiente de $t$. ◦

El siguiente teorema vincula la estabilidad exponencial del origen del sistema no lineal con la estabilidad exponencial de su linealización alrededor del origen.

**Teorema 4.8.** Sea $x = 0$ un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$, y la matriz Jacobiana $\partial f/\partial x$ es acotada y Lipschitz en $D$, uniformemente en $t$. Sea

$$A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right|_{x=0}$$

Entonces el origen es un PE exponencialmente estable del sistema no lineal síí es un PE exponencialmente estable para el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x$$

◦

**Ejemplo 4.6.** Consideremos el sistema de primer orden

$$\dot{x} = -x^3$$

Vimos en el Ejemplo 3.15 que el origen es AE, pero la linealización alrededor del origen es $\dot{x} = 0$ cuya matriz $A$ no es Hurwitz. Usando el Teorema 4.8, concluimos que el origen no es exponencialmente estable. ◦

El siguiente teorema es un teorema converso para estabilidad asintótica uniforme.

**Teorema 4.9.** Sea $x = 0$ un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable, $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$, y la matriz Jacobiana $\partial f/\partial x$ es acotada en $D$, uniformemente en $t$. Sea $\beta(\cdot, \cdot)$ una función clase $\mathcal{KL}$ y $r_0$ una constante positiva tal que $\beta(r_0, 0) < r$. Sea $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r_0\}$. Supongamos que las trayectorias del sistema satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)\,, \quad \forall x(t_0) \in D_0\,, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Entonces existe una función $V : [0, \infty) \times D_0 \to \mathbb{R}$ que satisface las desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) &\leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x\|) \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x\|) \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$, $\alpha_3(\cdot)$ y $\alpha_4(\cdot)$ son funciones clase $\mathcal{K}$ definidas en $[0, r_0]$. Si el sistema es estacionario, $V$ puede elegirse independiente de $t$. ◦

## 4.3. Teoremas de Invariancia

Para sistemas estacionarios, el teorema de invariancia de LaSalle muestra que las trayectorias del sistema tienden al máximo conjunto invariante contenido en el conjunto $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$. En el caso de sistemas inestacionarios, no está claro, en principio, como definir el conjunto $E$, ya que $\dot{V}(t, x)$ es función tanto del tiempo como del estado. La situación se simplifica si se puede probar que

$$\dot{V}(t, x) \leq -W(x) \leq 0$$

porque entonces $E$ puede definirse como el conjunto de puntos donde $W(x) = 0$. Sería de esperar que las trayectorias del sistema tiendan a $E$ cuando $t$ tiende a infinito. Ese es precisamente el resultado del siguiente teorema.

**Teorema 4.10 (Principio de invariancia para sistemas inestacionarios).** Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ y supongamos que $f(t, x)$ es seccionalmente continua en $t$ y localmente Lipschitz en $x$, uniformemente en $t$, en $[0, \infty) \times D$. Sea $V : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} W_1(x) \leq V(t, x) &\leq W_2(x) \\ \dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -W(x) \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$, donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones continuas definidas positivas y $W(x)$ es una función continua y semidefinida positiva en $D$. Sea $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$. Entonces todas las soluciones de $\dot{x} = f(t,x)$ con $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ son acotadas y satisfacen

$$W(x(t)) \to 0\,, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

Más aún, si todas las hipótesis valen globalmente y $W_1(x)$ es radialmente no acotada, el resultado vale para toda $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. ∘

El límite $W(x(t)) \to 0$ implica que $x(t)$ tiende a $E$ cuando $t \to \infty$, donde

$$E = \{x \in D \mid W(x) = 0\}$$

Por lo tanto, el conjunto límite positivo de $x(t)$ es un subconjunto de $E$. Esta conclusión (de que $x(t)$ tiende a $E$) es mucho más débil que el principio de invariancia de LaSalle para sistemas estacionarios, que concluye que $x(t)$ tiende al mayor conjunto invariante contenido en $E$. Esta conclusión más fuerte para sistemas estacionarios es consecuencia de la propiedad de estos sistemas enunciada en el Lema 3.4, que dice que el conjunto límite positivo es un conjunto invariante. Existen algunos casos especiales de sistemas inestacionarios para los cuales el conjunto límite positivo tiene una cierta propiedad de invariancia. Sin embargo, para un sistema inestacionario genérico, el conjunto límite positivo no es invariante. El hecho de que, para sistemas estacionarios, $x(t)$ tiende al mayor conjunto invariante contenido en $E$, nos permitió llegar al Corolario 3.6, que prueba estabilidad asintótica del origen mostrando que el conjunto $E$ no contiene ninguna trayectoria completa del sistema salvo la solución trivial. Para sistemas inestacionarios no existe una extensión del Corolario 3.6 que permita demostrar estabilidad asintótica.

Sin embargo, si además de satisfacer $\dot{V}(t,x) \leq 0$, la integral de $\dot{V}(t,x)$ satisface cierta desigualdad, se puede concluir estabilidad asintótica, como establece el siguiente teorema.

**Teorema 4.11 (Estabilidad asintótica con $\dot{V}(t,x)$ semidefinida positiva).** Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ y supongamos que $f(t,x)$ es seccionalmente continua en $t$ y localmente Lipschitz en $x$ sobre $[0,\infty) \times D$. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(t,x)$ en $t = 0$. Sea $V : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable que satisface

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x)$$

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0$$

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau,t,x))\, d\tau \leq -\lambda V(t,x), \qquad 0 < \lambda < 1$$

para todo $t \geq 0$ y $x \in D$ para algún $\delta > 0$, donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones definidas positivas en $D$, y $\phi(\tau,t,x)$ es la solución del sistema que comienza en $(t,x)$.

Entonces, el origen es uniformemente asintóticamente estable. Si todas las condiciones valen globalmente y $W_1(x)$ es radialmente no acotada, entonces el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Si

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \qquad k_1 > 0, k_2 > 0, c > 0,$$

entonces el origen es exponencialmente estable. ∘

**Ejemplo 4.7 (Sistema lineal inestacionario revisitado).** Sea el sistema

$$\dot{x} = A(t)x$$

donde $A(t)$ es continua $\forall t \geq 0$. Supongamos que existe una matriz simétrica $P(t)$ que satisface

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \qquad \forall t \geq 0$$

y la ecuación diferencial matricial

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C^T(t)C(t)$$

donde $C(t)$ es continua. La derivada de la función cuadrática

$$V(t,x) = x^T P(t) x$$

a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &= x^T \Big(\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)\Big)x \\ &= -x^T C^T(t)C(t)x \leq 0. \end{aligned}$$

De la teoría de sistemas lineales inestacionarios sabemos que las trayectorias del sistema que comienzan en el punto $x$ están dadas por

$$\phi(\tau, t, x) = \Phi(\tau, t)x,$$

donde $\Phi(\tau, t)$ es la *matriz de transición de estados*. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau, t, x))\, d\tau &= -x^T \Big[\int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)\, d\tau\Big] x \\ &= -x^T W(t, t+\delta)x, \end{aligned}$$

donde

$$W(t, t+\delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)\, d\tau.$$

Supongamos que existe una constante $k < c_2$ tal que

$$W(t, t+\delta) \geq kI, \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau, t, x))\, d\tau \leq -k\|x\|_2^2 \leq -\frac{k}{c_2} V(t,x).$$

Así, todas las hipótesis del Teorema 4.11 se satisfacen globalmente y concluimos que el origen es globalmente exponencialmente estable.

Los lectores familiares con la teoría de sistemas lineales reconocerán que la matriz $W(t, t+\delta)$ es el *Gramiano de observabilidad* del par $(A(t), C(t))$ y que la desigualdad $W(t, t+\delta) \geq kI$ está garantizada si el par $(A(t), C(t))$ es uniformemente observable.

Comparando este ejemplo con el Ejemplo 4.5 vemos que el Teorema 4.11 permite relajar el requerimiento de que la matriz $Q(t)$ en (4.8) sea definida positiva a pedir que $Q(t) = C^T(t)C(t)$ con el par $(A(t), C(t))$ sea uniformemente observable. ◦

# Bibliografía


Golub, G.H. and C.F. van Loan (1996). *Matrix computations*. 3 ed.. Johns Hopkins University Press.

Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer.

Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear control systems*. 3rd ed.. Springer-Verlag.

Isidori, Alberto (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.

Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd ed.. Prentice-Hall.

Krstić, M., I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons.

Sastry, Shankar (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.

Sepulchre, R., M. Janković and P. V. Kokotović (1997). *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag.

Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **34**, 435–443.

Sontag, E.D. and Y. Wang (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters* **24**, 351–359.

van der Schaft, A. J. (2000). *$L_2$-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag.

# Índice alfabético