1. Sea $f(x)$ una función continuamente diferenciable. Mostrar que el punto de equilibrio x^* de $\dot{x} = f(x)$ es aislado si la matriz Jacobiana $[\partial f/\partial x](x^*)$ es no singular.

   Ayuda: Usar el Teorema de la Función Implícita enunciado a continuación.

   Teorema (Teorema de la Función Implícita). Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en cada punto (x, y) de un conjunto cerrado $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Sea (x_0, y_0) un punto en $\mathcal{S}$ para el cual $f(x_0, y_0) = 0$ y para el cual la matriz Jacobiana $[\partial f/\partial x](x_0, y_0)$ es no singular. Entonces existen entornos $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 y $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ de y_0 tales que para cada $y \in \mathcal{V}$ la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene una solución única $x \in \mathcal{U}$. Además, esta solución puede expresarse como $x = g(y)$, donde g es continuamente diferenciable en $y = y_0$.

2. Sea $y(t)$ una función escalar no negativa que satisface la desigualdad

$$y(t) \leq k_1 e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}[k_2 y(\tau) + k_3] d\tau, \qquad k_1, k_2, k_3 \geq 0, \alpha > k_2.$$

   Usando la desigualdad de Gronwall-Bellman mostrar que

$$y(t) \leq k_1 e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)} + \frac{k_3}{\alpha - k_2}\left[1 - e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)}\right].$$

   Ayuda: Tomar $z(t) = y(t)e^{\alpha(t-t_0)}$ y encontrar la desigualdad que satisface z.

3. Sea $\mathcal{L}_\infty$ el conjunto de todas las funciones seccionalmente continuas $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que cada componente $u_i(t)$ es uniformemente acotada para todo $t \geq 0$. Sea $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|$, donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma p en $\mathbb{R}^n$.

   1. Mostrar que $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}$ es una norma bien definida.
   2. Mostrar que $\mathcal{L}_\infty$ con la norma $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}$ es un espacio de Banach.

4. Usando el Teorema del Mapa Contractivo mostrar que el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\varepsilon x_1}{1 + x_1^2}\right) x_1 + \varepsilon x_2 &= 1 \\ \varepsilon x_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon x_2}{1 + x_2^2}\right) x_2 &= 2, \end{aligned}$$

   donde $\varepsilon < \frac{1}{2}$, tiene una única solución real.