1. La Figura 1 muestra un esquema de un sistema de suspensión magnética, en el que una bola de material metálico se suspende mediante un electroimán de corriente controlada por realimentación a través de una medición óptica de la posición de la bola.

   Este sistema tiene los ingredientes básicos de sistemas para levitación de masas usados en giróscopos, acelerómetros y trenes de alta velocidad.

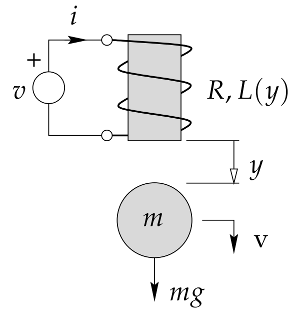

Figura 1: Suspensión magnética

   Básicamente, la ecuación de movimiento de la bola es

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg + F(y, i)$$

   donde m es la masa de la bola, $y \geq 0$ es la posición vertical (hacia abajo) de la bola medida desde un punto de referencia ($y = 0$ cuando la bola está pegada al electroimán), k es el coeficiente de fricción viscosa, g es la aceleración de la gravedad, $F(y, i)$ es la fuerza generada por el electroimán, e i es la corriente. La inductancia del electroimán depende de la posición de la bola, y puede modelarse como

$$L(y) = L_1 + \frac{L_0}{1 + y/a}$$

   donde L_1, L_0 y a son constantes positivas.

   Este modelo representa el caso en el que la inductancia tiene su máximo valor cuando la bola está cerca del electroimán, y decrece a un valor constante a medida que la bola se aleja a $y = \infty$. Tomando $E(y, i) = \frac{1}{2}L(y)i^2$ como la energía almacenada en la bobina, la fuerza $F(y, i)$ está dada por

$$F(y, i) = \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{L_0 i^2}{2a(1 + y/a)^2}$$

   Comandando el circuito de la bobina con una fuente de tensión v, la ley de tensiones de Kirchhoff da la relación

$$v = \dot{\phi} + Ri,$$

   donde R es la resistencia del circuito y $\phi = L(y)i$ es el flujo magnético.

   (a) Usando $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ y $x_3 = i$ como variables de estado, y $u = v$ como entrada de control, mostrar que la ecuación de estado del sistema está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0 a x_3^2}{2m(a + x_1)^2} \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)}\left[-Rx_3 + \frac{L_0 a x_2 x_3}{(a + x_1)^2} + u\right]
\end{aligned}$$

   (b) Suponer que se desea equilibrar la bola en una posición deseada $y_R > 0$. Encontrar los valores de régimen permanente $\bar{i}$ y $\bar{v}$, de i y v respectivamente, necesarios para mantener el equilibrio.

   (c) Mostrar que el punto de equilibrio obtenido tomando $u = \bar{v}$ es inestable.

   (d) Usando linealización diseñar un control por realimentación de estados para estabilizar la bola en la posición deseada; o sea, hacer el equilibrio asintóticamente estable.

(e) *Ensayo de robustez:* considerando los datos numéricos nominales

$$m = 0{,}01\text{kg} \qquad k = 0{,}001\text{N/m/s} \qquad g = 9{,}81\text{m/s}^2 \qquad a = 0{,}05\text{m}$$
$$L_0 = 0{,}01\text{H} \qquad L_1 = 0{,}02\text{H} \qquad R = 10\Omega \qquad y_R = 0{,}05\text{m}$$

estudiar el desempeño del sistema a lazo cerrado mediante simulación digital. En particular, estudiar el comportamiento transitorio y el efecto de una variación del 20 % en todos los valores nominales de los parámetros del sistema.

(f) *Estima de la región de atracción:* con los mismos datos numéricos del punto anterior, realizar el siguiente experimento: comenzando con la bola en el equilibrio, desplazarla una distancia pequeña hacia arriba y luego soltarla. Repetir el experimento gradualmente incrementando la distancia de desplazamiento inicial. Determinar mediante simulación digital el máximo *rango de captura* para el cual la bola vuelve al equilibrio deseado. Repetir la experiencia para desplazamientos hacia abajo.

(g) Rediseñar el control por realimentación de estados del punto (d) para incluir acción integral. Repetir los ensayos de los puntos (e) y (f) y comparar el desempeño de este diseño con el del punto (d).

(h) Asumiendo que sólo puede medirse la posición de la bola y y la corriente i, diseñar un control lineal por realimentación de salida, con acción integral, para estabilizar la bola en la posición deseada y_R. Repetir los ensayos de los puntos (e) y (f) y comparar el desempeño de este diseño con los de los puntos (d) y (g).

(i) Asumiendo que sólo puede medirse la posición de la bola y y la corriente i, diseñar un control por ganancia tabulada con acción integral y por realimentación de salida para que la posición de la bola siga una posición de referencia y_R. Estudiar por simulación digital el desempeño del sistema a lazo cerrado y compararlo con el diseño via linealización del punto anterior.

2. La Figura 2 representa un sistema de péndulo invertido. El pivote del péndulo está montado sobre un carrito que puede moverse horizontalmente mediante la acción de una fuerza F. Manipulando F como variable de control, el objetivo es estabilizar el péndulo en posición vertical en una posición deseada del carrito.

   Los parámetros del sistema, y sus valores nominales, son los siguientes,

$m = 0{,}1\text{kg}$	masa del péndulo,
$M = 1\text{kg}$	masa del carrito,
$L = 0{,}5\text{m}$	distancia pivote/centro de gravedad,
$I = 1/120\text{kg m}^2$	momento de inercia del péndulo,
$k = 0{,}1\text{N/m/s}$	coeficiente de fricción viscosa,
$g = 9{,}81\text{m/s}^2$	aceleración de la gravedad,
y	desplazamiento del pivote,
θ	rotación angular del péndulo,

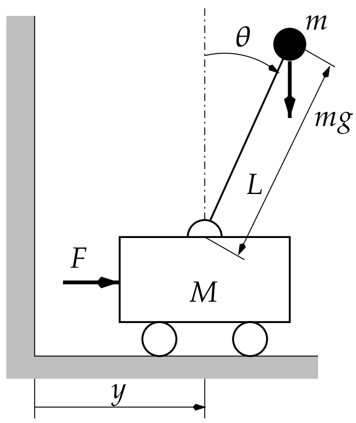

Figura 2: Péndulo invertido

y su comportamiento dinámico puede describirse por las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)}\begin{bmatrix} m+M & -mL\cos\theta \\ -mL\cos\theta & I+mL^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} mgL\operatorname{sen}\theta \\ F + mL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta - k\dot{y}\end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta(\theta) = (I+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos^2\theta \geq (I+mL^2)M + m > 0.$$

(a) Usando $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = y$ y $x_4 = \dot{y}$ como variables de estado y $u = F$ como entrada de control, escribir las ecuaciones de estado.

(b) Mostrar que el sistema tiene un *conjunto* de equilibrio.

(c) Se pretende estabilizar el péndulo en su posición vertical, $\theta = 0$. Determinar un punto de equilibrio a lazo abierto para el cual $\theta = 0$ y mostrar que es inestable.

(d) Linealizar la ecuación de estado alrededor del punto de equilibrio elegido y comprobar que la ecuación de estado linealizada es controlable.

(e) Usando linealización, diseñar un control por realimentación de estados para estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio deseado.

(f) *Ensayo de robustez:* estudiar el desempeño del sistema a lazo cerrado mediante simulación digital. Estudiar en particular el efecto de variaciones de $\pm 10\,\%$ en los valores nominales de los parámetros del sistema sobre la respuesta transitoria.

(g) *Estima de la región de atracción:* determinar, mediante simulación digital, el rango máximo de ángulo inicial que puede tener el péndulo, comenzando en reposo, para que el control diseñado pueda llevarlo al equilibrio $\theta = 0$.

(h) Asumiendo que sólo puede medirse el ángulo θ y la posición y del carrito, diseñar por linealización un control por realimentación de salidas para estabilizar el péndulo en $\theta = 0$. Repetir los ensayos (f) y (g) y comparar el desempeño de este diseño con el obtenido con el control por realimentación de estados del punto (e).